Aufgaben zur Vektoranalysis

WS 2009/2010

Aufgabe 1

Berechnen Sie den Gradienten des Skalarfeldes

$$\phi(x,y,z) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Divergenz der folgenden Vektorfelder

a) $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x^3z^2 \\ x^2-z^2 \\ xyz \end{pmatrix}$ b) $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy - x^2z \\ 2yz^2 \\ x^2y + yz \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

Wie sind die Parameter a und b zu wählen, damit das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz^2 + y^3z \\ axy^2z \\ 2x^2z + bxy^3 \end{pmatrix}$$

überall wirbelfrei ist?

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{s}$ für das Vektorfeld

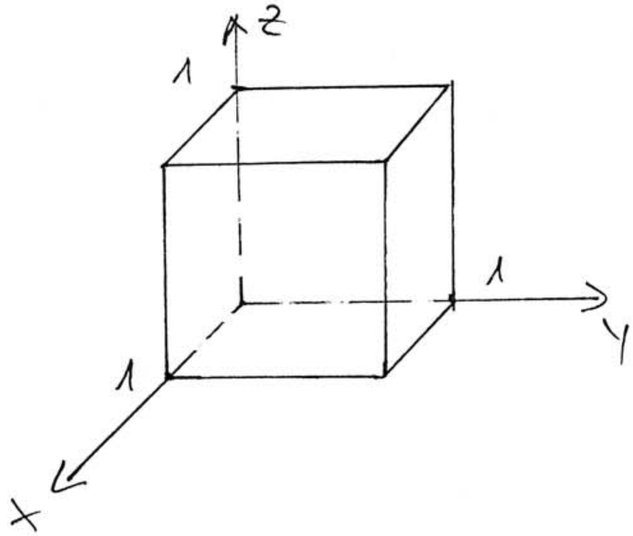
$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ -x^2yz \\ xz^2 \end{pmatrix}$ längs des Weges C mit $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$

für $0 \le t \le 1$.

b) Ist $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{s}$ allgemein wegunabhängig?

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ xyz \end{pmatrix}$ durch die geschlossene Oberfläche des Einheitswürfels im ersten Oktanten. Verwenden Sie zur Berechnung das Oberflächenintegral.



b) Berechnen Sie das Ergebnis von a) mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß

Aufgabe 6

Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ xy \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Divergenz und Rotation dieses Feldes. Was folgt daraus?

b) Bestimmen Sie $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ für die Schraubenlinie C

mit $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \frac{t}{2\pi} \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$.

c) Welcher Wert ergibt sich für das Integral, wenn alternativ der kürzeste Weg zwischen $\vec{s}(0)$ und $\vec{s}(2\pi)$ gewählt wird?

Lösungen

Aufgabe 1

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

a) $\operatorname{div} \vec{F} = 6x^2z^2 + xy$

b) $\operatorname{div} \vec{v} = 2\left(-xz + y + z^2\right)$

Aufgabe 3

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} (3b-a)\,xy^2 \\ (1-b)\,y^3 \\ (a-3)\,y^2z \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad a=3; \quad b=1;$$

Aufgabe 4

a) $$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \left(t^5 - 2t^8 + 3t^9\right)dt = \frac{1}{6} - \frac{2}{9} + \frac{3}{10} = \frac{15-20+27}{90} = \frac{22}{90} = \frac{11}{45};$$

b) $$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} x^2-y \\ -z^2 \\ -2(xyz+xy) \end{pmatrix} \neq \vec{0} \Rightarrow \int_C \vec{F}\cdot d\vec{s}$$ nicht allgemein wegunabhängig

Aufgabe 5

a) $\frac{9}{4}$

b) $$\oiint_A \vec{F}\cdot d\vec{A} = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2+xy)\,dx\,dy\,dz = \frac{9}{4};$$

Aufgabe 6

a) $\operatorname{div}\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}$ quellenfrei, $\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ -2z \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

d.h. $\vec{F}$ ist nicht wirbelfrei

b) $-\pi$

c) $\vec{s}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{s}(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \leadsto \quad \tilde{\vec{s}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \quad 0 \le t \le 1$

$$\Rightarrow \int_{\tilde{C}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0$$