Aufgabe 1:

Zu zeigen ist jeweils, dass die Folge der a_k eine Nullfolge ist.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-3}{3^{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4n}{3^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-2}} \right) = 0$, also ja.

b) $\frac{1}{4n+1}$ ist eine Nulfolge, also ja.

c) Betrachte $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \right) = 0$, also ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = \mathrm{e}^0 = 1$ und damit ist das norwendige Kriterium nicht erfüllt.

Aufgabe 2:

a) $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^2}{2n^2}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2} < 1$, also konvergent.

b) Mit dem Wurzelkriterium folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} < 1$. Folglich konvergiert die Reihe.

c) Mit dem Wurzelkriterium folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = lim_{n\to\infty} \frac{i \sqrt[n]{n}}{\ln n} = 0$. Die Reihe ist damit konvergent.

d) $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$. Betrachte zunÃ¤chst $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \left[\left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right]$.

Mit der Regel von l'Hospital folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \left[\left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right] = -1$.

Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \mathrm{e}^{-1} < 1$ und die Reihe ist konvergent.

Aufgabe 3:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4 > 1$, also ist die Reihe divergent.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{3n^2(n+2)} = \frac{1}{3} < 1$. Die Reihe ist konvergent.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$. Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} n \sin \left(\frac{2}{n} \right) = 2 > 1$, folglich divergent.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5(n-1)(n+2)}{6(n+3)(n-2)} = \frac{5}{6} < 1$. Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium.

f) $\dfrac{\alpha^{2n}}{(1+\alpha^2)^{n-1}} = (1+\alpha^2)\left(\dfrac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)^n$. Nun ist $\dfrac{\alpha^2}{1+\alpha^2} < 1$, so dass eine geometrische Reihe vorliegt: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(1+\alpha^2)^{n-1}} = (1+\alpha^2)\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, mit $q < 1$. Also ist die Reihe konvergent.

Aufgabe 4:

a) $\dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3k-2} - \dfrac{1}{3k+1}\right)$.

Also: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{3k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$.

Der Grenzwert der Reihe berechnet sich zu $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}$

b) $\dfrac{1}{(k+m)k} = \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{km}\right)$. Also: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+m)k} = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{m+n} \frac{1}{k}\right)$.

Man berechnet den Limes zu $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{m+n} \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$.

Aufgabe 5:

Die Reihe ist alternierend. Man zeigt zunächst, dass die Voraussetzungen für das Leibnizkriterium erfüllt sind:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} \to 0 \qquad \text{und} \qquad |a_n| \geq |a_{n+1}| \iff 2n-1 \leq 2n+1$$

Damit gilt die Abschätzung

$$|a_n| = \frac{1}{2n-1} < 0.5 \cdot 10^{-3}, \quad \text{also} \quad n > \frac{2 \cdot 10^3 + 1}{2} \approx 10^3 = 1000.$$

D.h., es müssen mindestens 1000 Terme aufsummiert werden.

Aufgabe 6:

Die Summe der ersten vier Terme der Reihe s_4 ist

$$s_4 = \sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^n}{n!} = -\frac{5}{8}$$

Für die Fehlerabschätzung zeigt man zunächst, dass die Voraussetzungen des Leibnizkriteriums erfüllt sind:
Damit gilt die Abschätzung

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0 \quad \text{und} \quad |a_n| > |a_{n+1}| \iff \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n!}.$$

Damit gilt

$$|s - s_4| \leq |a_5| = \frac{1}{5!}$$