<u>Lösungshinweise zu Eigenwerten / Eigenvektoren SS 2006</u>
<u>(Prof. Clemen, Prof. Hollmann, Prof. Zacherl)</u>

Aufgabe 1

Eigenwerte: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$

Eigenvektoren: $\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Eigenwerte: $\lambda_1 = 2 + 4j$, $\lambda_2 = 2 - 4j$

Eigenvektoren: $\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

a) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in C$ d.h. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist kein Eigenvektor zu A.

b) Charakteristisches Polynom: $-\lambda^3 + 11\lambda^2 - 34\lambda + 24 = 0$
Eigenwerte: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 1$

Aufgabe 4

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3\vec{x}$ d.h. $\lambda_2 = 3$

c) Der dritte Eigenwert muss reell sein.

Aufgabe 5

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Charakteristisches Polynom: $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$
Restpolynom: $-\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$
$\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$

Aufgabe 6

a) Charakteristisches Polynom: $-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98 = 0$
Eigenwerte: $\lambda_1 = \lambda_2 = 7$, $\lambda_3 = -2$

b) Orthonormierte Eigenvektoren: $\vec{x}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(2)} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(3)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $R = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$ Es gilt: $R^T AR = D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7

Es gilt: $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$ entspricht $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$.

Betrachte $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Eigenwerte: $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 1$
Die Hauptachsen liegen in Richtung der orthonormierten Eigenvektoren:
$\vec{x}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) Längen der Hauptachsen : $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = 1$.