Aufgabe 1:

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen in x:

a) $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$

b) $r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5\ 3^n} = 3$

c) $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\,\frac{n+2}{n+3} = \frac{1}{2}$

d) $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{b^{n^2}}{b^{(n+1)^2}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{|b^{2n+1}|} = \begin{cases} 1 & & |b| = 1 \\ \infty & \text{für} & |b| < 1, \qquad b \in \mathbb{C} \\ 0 & & |b| > 1 \end{cases}$

e) $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\sin\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{(n+1)^2}\cos\frac{1}{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}\right| = 1$

Aufgabe 2:

a) Entwicklung von $f(x) = x^5$ um $x_0 = -2$ bis zur 6. Ordnung liefert

$$p(x) = -32 + 80(x+2) - 80(x+2)^2 + 40(x+2)^3 - 10(x+2)^4 + (x+2)^5.$$

b) Zur Potenzreihenentwicklung des $\cos x$ um $x_0 = \frac{\pi}{2}$ bis $n = 6$ kann man die Potenzreihenentwicklung des Sinus nutzen:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = -\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^3}{3!} - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^5}{5!} + \cdots$$

Aufgabe 3:

a) Die Entwicklungen von $\ln(1+x)$ und $\frac{1}{1+x}$ werden genutzt:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x)}{1+x} &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right) \cdot \left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots\right) \\ &= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + \cdots \end{aligned}$$

b) Hier entwickelt man zunächst die logarithmierte Funktion

$$\ln(f(x)) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Es folgt

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

Aufgabe 4:

a) $r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)}\right| = 1$

Um festzustellen, um welche Funktion es sich handelt, führt man eine Partialbruchentwicklung durch und findet

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$$

Es gilt $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\frac{1}{2}\ln(1-x)$ und $-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+2} = \frac{1}{2x^2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4}$,

also insgesamt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)} = -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x^2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4}$$

b) Hier ist der Konvergenzradius

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\right| = 1$$

Man zerlegt die Reihe in kleinere Bestandteile:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} = \frac{x}{1-x} + \frac{2}{x}\ln(1-x) + 2 \quad \text{für} \quad 0 < |x| < 1$$

c) Der Konvergenzradius berechnet sich erneut zu 1. Man findet mit Integration

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{2}(1-x)^2\ln(1-x) - \frac{3}{4}(1-x)^2\right]$$

Aufgabe 5:

a) Man zerlegt die Funktion mit Partailbruchzerlegung in kleiner Bestandteile:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{2}{3}\frac{1}{x+2} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-x} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(-\frac{x}{2})-1}$$

Es gilt: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n$ und $\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n$

Damit folgt $\frac{x}{x^2+x-2} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}x^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n$

Die Funktion $\frac{1}{x-1}$ wird für $x \in (-1,1)$ durch die Potenzreihe dargestellt. Die Funktion $\frac{1}{x+2}$ für $x \in (-2,2)$. Die Konvergenzbereiche überlappen sich für $x \in (-1,1)$.

Damit wird die Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2+x-2}$ in dem Intervall $(-1,1)$ durch die Summe der Reihen dargestellt.

b) $f(x) = \dfrac{5-2x}{x^2-5x-6} = -\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\frac{x}{3}} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{3}\right)^n + \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$

Hier wird die Funktion $\dfrac{1}{x-3}$ für $x \in (-3,3)$ durch die Potenzreihe dargestellt, die Funktion $\dfrac{1}{x-2}$ für $x \in (-2,2)$. Die Konvergenzbereiche überlappen sich für $x \in (-2,2)$.

Damit wird die Funktion $f(x) = \dfrac{5-2x}{x^2-5x+6}$ in dem Intervall $(-2,2)$ durch die Summe der Reihen dargestellt.

Aufgabe 6:

a) $r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2^{n+1}}{2^n}\right| = 2$

D.h. der Konvergenzbereich ist das Innere des Kreises mit Mittelpunkt $z=1$ und Radius 2.

b) $r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{3^{n+1}(n+2)}{3^n(n+1)}\right| = 3$

D.h. der Konvergenzbereich ist das Innere des Kreises mit Mittelpunkt $z=1$ und Radius 3.

Aufgabe 7:

a) $r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(3n+4)2^{n+1}}{2^n[3(n+1)+4]}\right| = 2$

Die Potenzreihe konvergiert für die reellen Werte $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.

b) $r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n(n+1)3^{n+1}}{3^n(n+1)(n+2)}\right| = 3$

Die Potenzreihe konvergiert für die reellen Werte $-\sqrt{8} < x < \sqrt{8}$.

c) $r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}\right| = 1$

Die Potenzreihe konvergiert für die reellen Werte $-0.5 < x < 1.5$.

Aufgabe 8:

a) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$

$\cos(x^2) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\cos(x^2)\dot{e}^x = \left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots\right)\cdot\left(1-\dfrac{x^4}{2}+\cdots\right) = 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{11}{24}x^4+\cdots$

Also

$$\int \cos(x^2)\cdot e^x\,dx = \int\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{11}{24}x^4+\cdots\right)dx = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}-\frac{11}{120}x^5+\cdots$$

b) $\dfrac{1}{1-\sin x} = \sum_{n=0}^{\infty} \sin^n x = 1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x + \cdots$

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + \cdots \\ &= 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \cdots\end{aligned}$$

Also

$$\int \frac{1}{1-\sin x}\, dx = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + \cdots$$

Aufgabe 9:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2 e^x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots}{x^2 \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)} = -\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 \sin x}{(1-\cos x)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4 + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{5!} + \cdots}{\frac{x^4}{4} + \cdots} = 4$