Lösungshinweise zu Fourier-Reihen SS 06
(Prof. Clemen, Prof. Hollmann, Prof. Weiß, Prof. Zacherl)

Aufgabe 1

a) Taylor-Reihe:
Die Funktion $f(x)$ muss im Punkt x_0 beliebig oft differenzierbar sein.
Die Folge der Restglieder muss eine Nullfolge sein.

b) Fourier-Reihe:
Die Funktion $f(x)$ muss periodisch sein. $f(x)$ darf im Intervall $[-L, L)$ nur endlich viele Sprungstellen haben und an jeder Sprungstelle muss die rechtsseitige und linksseitige Ableitung existieren.

c) Der Grenzwert a einer Folge $(a_n)_{n\in N}$ ist folgendermaßen definiert:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$.
Mit anderen Worten:
Ab einem bestimmten N weichen alle Folgenglieder beliebig wenig von dem Grenzwert a ab.
Oder:
Es liegen fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) innerhalb einer frei vorgebbaren ε-Umgebung des Grenzwertes.

Aufgabe 2

Auf Skizzen wird an dieser Stelle verzichtet.

a) $a_0 = -\dfrac{A}{4}$

$$a_k = -\frac{A}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{4}$$

$$b_k = \frac{A}{k\pi}\left(\cos\frac{k\pi}{4} - 1\right)$$

Und damit

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\omega kt + b_k \sin\omega kt\right) = -\frac{A}{8} + \frac{A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{4}\cos\omega kt + \frac{1}{k}\left(\cos\frac{k\pi}{4} - 1\right)\sin\omega kt\right)$$

b) $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$

$a_k = -\dfrac{2}{\pi k^2}$ für k ungerade und $a_k = 0$ für k gerade.

$$b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Es folgt

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)t + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kt\right)$$

c) Die Funktion $f(t)$ ist ungerade. Damit verschwinden alle a_k. Mit der 2π -Periodizität ergibt sich

$b_k = \frac{4}{\pi k^2}\sin(\frac{k\pi}{2})$, also ist $b_k = 0$ für k gerade, $b_k = \frac{4}{\pi k^2}$ für k mod 4 = 1 und $b_k = -\frac{4}{\pi k^2}$ für k mod 4 = 3.

Es folgt

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1^2} - \frac{\sin 3t}{3^2} + \frac{\sin 5t}{5^2} - \frac{\sin 7t}{7^2} + \cdots\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\sin(2k+1)t}{(2k+1)^2}$$

Aufgabe 3

a) Auf die Skizze wird an dieser Stelle verzichtet.

b) Die Funktion $f(t)$ ist ungerade und alternierend.

c) Da die Funktion ungerade ist verschwinden alle a_k. Da $f(t)$ alternierend ist, gilt $b_{2l} = 0$ für alle $l \in \mathbf{N}$. Es sind also nur noch die Koeffizienten b mit ungeradem Index zu berechnen.

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-a}^{T-a} f(t)\sin(k\omega t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{-a}^{a}\frac{1}{a}t\sin(k\omega t)dt + \int_{a}^{\frac{T}{2}-a}\sin(k\omega t)dt + \int_{\frac{T}{2}-a}^{\frac{T}{2}+a} -\frac{1}{a}\left(t-\frac{T}{2}\right)\sin(k\omega t)dt + \int_{\frac{T}{2}+a}^{T-a}\sin(k\omega t)dt\right]$$

Nun berechnet man:

$$\frac{2}{T}\int_{-a}^{a}\frac{1}{a}t\sin(k\omega t)dt = \frac{2}{T}\frac{2}{k\omega a}\left(\frac{\sin(k\omega a)}{k\omega} - a\cos(k\omega a)\right)$$

$$\frac{2}{T}\int_{a}^{\frac{T}{2}-a}\sin(k\omega t)dt = \frac{2}{T}\frac{2}{k\omega}\cos(k\omega a)$$

$$\frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}-a}^{\frac{T}{2}+a} -\frac{1}{a}\left(t-\frac{T}{2}\right)\sin(k\omega t)dt = \frac{2}{T}\frac{2}{k\omega a}\left(\frac{\sin(k\omega a)}{k\omega} - a\cos(k\omega a)\right),$$ da k ungerade ist.

$$\frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}+a}^{T-a} \sin(k\omega t)dt = \frac{2}{T}\frac{2}{k\omega}\cos(k\omega a)$$

so dass man insgesamt

$$b_k = \frac{2}{T}\frac{4}{k\omega a}\left(\frac{\sin(k\omega a)}{k\omega} - a\cos(k\omega a)\right) + \frac{2}{T}\frac{4}{k\omega}\cos(k\omega a) = \frac{4}{k\pi}\frac{\sin(k\omega a)}{k\omega a}$$

mit $k = 2l+1$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ erhält.

d) Auf die Skizze wird an dieser Stelle wieder verzichtet.

e) Zu berechnen ist

$$\lim_{a\to 0}\frac{4}{k\pi}\left(\frac{\sin(k\omega a)}{k\omega a}\right) = \frac{4}{k\pi}$$

f) Auf die Skizze wird an dieser Stelle wieder verzichtet.

$$b_k = \frac{4}{k\pi}\frac{\sin(k\omega a)}{k\omega a} = \frac{4}{k\pi}\frac{4T\cdot\sin\left[k\cdot\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}\right]}{2\pi k\cdot T} = \frac{8}{(\pi k)^2}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right).$$ Damit ist $b_k = (-1)^k\frac{8}{(\pi k)^2}$

für k ungerade und $b_k = 0$ für k gerade und

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin[(2k+1)\omega t]$$

Aufgabe 4 (*)

Ist $a \in \mathbf{Z}$, so ist $f(x) = \sin(ax)$ auch schon die Fourier-Reihe von $f(x)$. Es sei also $a \notin \mathbf{Z}$:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(ax)\cos(kx)dx = a\frac{1-\cos(2\pi a)}{\pi(a^2-k^2)}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(ax)\sin(kx)dx = \frac{k\sin(2\pi a)}{\pi(a^2-k^2)}$$

Damit findet man für die Fourier-Reihe $S(x)$:

$$S(x) = \frac{1}{2\pi a}(1-\cos(2\pi a)) + \frac{a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(2a\pi)}{(a^2-k^2)}\cos(kx) + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin(2a\pi)}{(a^2-k^2)}\sin(kx)$$

Untersuchung an der Stelle $x = 0$:

$\sin(ax)$ ist für $a \notin \mathbf{Z}$ nicht 2π -periodisch. Die Funktion ist an der Stelle $x = 0$ unstetig.

Mit $f(0) = 0$ und $f(2\pi) = \sin(2\pi a)$ folgt $S(0) = \frac{1}{2}\sin(2\pi a)$

Aufgabe 5

Auf Skizzen wird verzichtet.

a) Es fehlt der Gleichanteil.

b) $f(x)$ ist gerade. Damit verschwinden alle b_k identisch und es dürfen nur cos-Terme auftauchen.

c) Der Gleichanteil ist π.

d) Die Funktion ist punktsymmetrisch. Damit verschwinden alle a_k identisch und es dürfen nur sin-Terme auftauchen.

Aufgabe 6

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t)\cos(k\omega t)dt = \frac{1}{T\omega}\left[\frac{1-\cos(1+k)\pi}{1+k} + \frac{1-\cos(1-k)\pi}{1-k}\right]$$

Für k ungerade folgt $a_k = 0$.

Ist k gerade und $k \neq 1$, so berechnet man $a_k = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{1+k} + \frac{2}{1-k}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{(k+1)(1-k)}$.

Für $k = 1$ findet man $a_1 = 0$.

Für $k \neq 1$ ist

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t)\sin(k\omega t)dt = 0$$

und $b_1 = 1$.

Aufgabe 7

a) Zu bestimmen sind die komplexen Fourierkoeffizienten c_k:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-jk\omega x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^0 e^x e^{-jkx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi e^{-x}e^{-jkx}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-e^{-(1-jk)\pi}}{1-jk} + \frac{1-e^{-(1+jk)}}{1+jk}\right]$$

$$= \frac{1+(-1)^{k+1}e^{-\pi}}{\pi(1+k^2)}$$

Damit ergibt sich die Fourierreihe zu

$$S(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1+(-1)^{k+1}e^{-\pi}}{1+k^2}e^{jkx}$$

b) Hier findet man

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-jk\omega x}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 e^x e^{-jkx}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x}e^{-jkx}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1-e^{jk\pi-1}}{1-jk\pi} + \frac{1-e^{-(1+jk\pi)}}{1+jk\pi}\right] = \frac{(-1)^k e^{-1}-1}{1+k^2\pi^2}$$

und die Fourierreihe berechnet sich zu

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k e^{-1}-1}{1+k^2\pi^2}e^{jk\pi x}$$

Aufgabe 8

a) Auf eine Skizze sei an dieser Stelle verzichtet.

b) $$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-jk\omega x}dx = \frac{C}{2}\int_0^2 (e^t-1)e^{-jk\pi t}dt = \frac{C1}{2}\left[\frac{e^{(1-jk\pi)\cdot 2}-1}{1-jk\pi} + \frac{e^{-2jk\pi}-1}{jk\pi}\right] = \frac{C}{2}\left[\frac{e^2-1}{1+k^2\pi^2} + \frac{jk\pi(1-e^2)}{1+k^2\pi^2}\right]$$

c) $$a_k = 2\,\mathrm{Re}(c_k) = C\frac{e^2-1}{1+k^2\pi^2}$$

$$b_k = -2\,\mathrm{Im}(c_k) = C\frac{k\pi(e^2-1)}{1+k^2\pi^2}$$

d) Das Amplitudenspektrum berechnet man zu:

$$A_k = \sqrt{a_k{}^2 + b_k{}^2} = \left(\frac{C^2(k\pi)^2(e^2-1)^2 + (e^2-1)^2}{(1+k^2\pi^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{C(e^2-1)^2}{(1+k^2\pi^2)^2}\sqrt{1+k^2\pi^2}$$

Auf eine Skizze sei an dieser Stelle noch einmal verzichtet.