Aufgaben zu Fouriertransformation ***SS 06***
(Prof. Clemen, Prof. Hollmann, Prof. Weiß, Prof. Zacherl)

Aufgabe 1

Gegeben ist die folgende Zeitfunktion

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad t < 0 \end{cases}$$

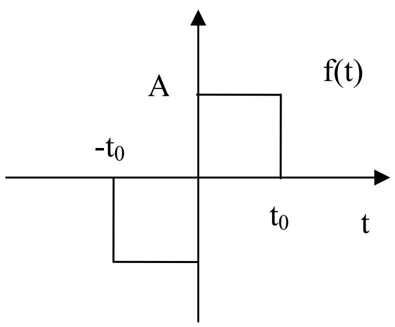
a) Skizzieren Sie die Funktion
b) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $F(\omega)$ und das Betragsspektrum $|F(\omega)|$.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion $f(t) = e^{-a|t|}$, mit $a \in \mathbf{R}_+$.

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(t)$.
b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $F(\omega)$.

Aufgabe 3



a) Ermitteln Sie aus der Skizze die Gleichung von $f(t)$.
b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $F(\omega)$ von $f(t)$.

(*) kennzeichnet eine Aufgabe mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad

Aufgabe 4

Gegeben ist die folgende Zeitfunktion

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t+T}{T} & \text{für} \quad -T \le t \le 0 \\ \dfrac{-t+T}{T} & \phantom{\text{für}} \quad 0 < t \le T \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad |t| > T \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion.
b) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $F(\omega)$ und das Betragsspektrum $|F(\omega)|$ von $f(t)$.
c) Die spektrale Energiedichte ist gegeben durch $e(\omega) = 2|F(\omega)|^2$. Berechnen Sie $e(\omega)$.

Aufgabe 5

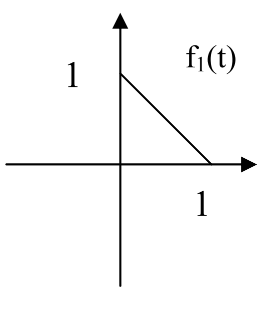
Gegeben ist die Funktion

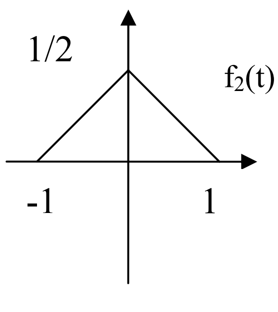
$$rect(at) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |t| \le \dfrac{1}{2a} \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad |t| > \dfrac{1}{2a} \end{cases}, \quad \text{mit } a \in \mathbf{R}_{+}$$

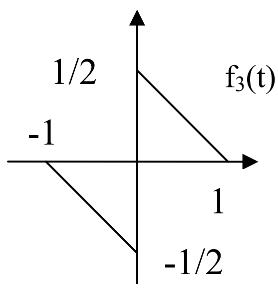
a) Zeichnen Sie $rect(at)$ für $a = 0.5$, $a = 1$ und $a = 2$.
b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $rect(0.5 \cdot t)$, $rect(t)$, $rect(2t)$.
c) Skizzieren Sie die Fouriertransformierten aus b).

Aufgabe 6

Gegeben sind die folgenden 3 Funktionen:







a) Stellen Sie die Gleichungen der Funktionen $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ auf!
b) Berechnen Sie den geraden und den ungeraden Anteil von $f_1(t)$.
c) Berechnen Sie die Fouriertransformierten $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$, $F_3(\omega)$!

Aufgabe 7

Gegeben sind die Zeitsignale

$$f_1(t) = \begin{cases} \cos \omega_0 t & \text{für} \quad -\pi < \omega_0 t < \pi \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad |\omega_0 t| > \pi \end{cases} \quad \text{und} \quad f_2(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t & \text{für} \quad -\pi \le \omega_0 t \le \pi \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad |\omega_0 t| > \pi \end{cases}$$

Der Fall $\omega_0 = 0$ sei ausgeschlossen.

a) Skizzieren Sie $f_1(t)$ und $f_2(t)$.
b) Berechnen Sie die Fouriertransformierten $F_1(\omega)$ und $F_2(\omega)$

Hinweis:

$$\int e^{ax} \cos(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cdot \cos bx + b \cdot \sin bx)$$
$$\int e^{ax} \sin(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cdot \sin bx - b \cdot \cos bx)$$

Aufgabe 8

Die diskrete Fouriertransformation $\underline{F}_d$ eines Eingangssignals $\underline{f}$ berechnet man zu

$$\underline{F}_d = \frac{1}{N}\underline{\underline{A}}\,\underline{f}.$$

Die Fourierrücktransformation $\underline{f}$ eines Spektrums ist gegeben durch $\underline{f} = \underline{\underline{B}}\,\underline{F}_d$.

a) Ermitteln Sie für eine N=8 DFT die Drehfaktoren und die Matrizen $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$.
b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Matrizen $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$?
c) Führen Sie die N=8 Punkte DFT eines abgetasteten Sinus mit Periodendauer $T = 4T_A$ durch.

Aufgabe 9

Eine Rechteckspannung mit der Frequenz 8kHz und einem Puls Pause-Verhältnis von 1:1 werde mit einer Rate von 32 kHz abgetastet. Es liegen folgende Abtastwerte vor:

$$f(0)=0\,,\ f(1)=1\,,\ f(2)=1\,,\ f(3)=0\,,\ f(4)=0\,,\ f(5)=1\,,\ f(6)=1\,,\ f(7)=0$$

a) Zeichnen Sie das Signal und die diskreten Abtastwerte.
b) Berechnen Sie das Spektrum mit der diskreten Fouriertransformation!

Aufgabe 10

Ein periodisches Signal wird abgetastet. Es liegen die folgenden Abtastwerte vor:

$$f(0)=-1\,,\ f(1)=1\,,\ f(2)=-1\,,\ f(3)=1\,,\ f(4)=-1\,,\ f(5)=1\,,\ f(6)=-1\,,\ f(7)=0$$

a) Bestimmen Sie den Gleichspannungsanteil $F_D(0)$, die Gesamtamplituden $A_n = 2|F_D(n)|$ und die Phasen $\varphi_n = -\arg(F_D(n))$.
b) Müssen Sie alle Amplituden und Phasen berechnen?