Aufgaben zu Fourier-Reihen ***SS 06***
Prof. Clemen, Prof. Hollmann, Prof. Weiß, Prof. Zacherl

Aufgabe 1

a) Erläutern Sie die Voraussetzungen, die eine Funktion erfüllen muss, wenn sie in eine Taylorreihe entwickelbar sein soll und durch die Taylorreihe dargestellt werden soll.

b) Erläutern Sie die Voraussetzungen, die eine Funktion erfüllen muss, wenn sie in eine Fourier-Reihe entwickelbar sein soll.

c) Was versteht man unter dem Grenzwert einer Folge $(a_n)_{n\in N}$?

Aufgabe 2

Skizzieren Sie die folgenden Funktionen und geben Sie ihre Fourier-Reihe an:

a) $f(t)=\begin{cases}-A & 0\le t\le \tau \\ 0 & \tau<t<T\end{cases}$

Dabei ist $T=8\tau$ und die Funktion $f(t)$ T-periodisch.

b) $f(t)=\begin{cases}t & 0\le t\le \pi \\ 0 & \pi<t<2\pi\end{cases}$

$f(t)$ ist 2π -periodisch.

c) $f(t)=\left|t+\frac{\pi}{2}\right|-\frac{\pi}{2}$ für $-\frac{3}{2}\pi\le t\le\frac{1}{2}\pi$ und $f(t+2\pi)=f(t)$

Aufgabe 3

Eine Funktion mit der Periode T sei wie folgt definiert, dabei gilt $0<a<\frac{T}{4}$

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{a}t & 0\le t<a \\ 1 & a\le t<\frac{T}{2}-a \\ -\frac{1}{a}\left(t-\frac{T}{2}\right) & \frac{T}{2}-a\le t<\frac{T}{2}+a \\ -1 & \frac{T}{2}+a\le t<T-a \\ \frac{1}{a}(t-T) & T-a\le t<T\end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion für $-T\le t\le 2T$

b) Untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrien!

c) Bestimmen Sie sämtliche Fourier-Koeffizienten.
Ermitteln Sie zunächst die, die aus der Symmetrie ableitbar sind, dann die restlichen. Wählen Sie das Integrationsintervall so, dass Sie lediglich 4 Integrale berechnen müssen. Nutzen Sie zusätzlich aus, dass aus Symmetriegründen jeweils zwei der Integrale den gleichen Beitrag liefern

d) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Grenzfall $a \to 0$

e) Nutzen Sie c) um für den Fall d) die Fourier-Koeffizienten zu berechnen!

f) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Grenzfall $a = \frac{T}{4}$.
Bestimmen Sie aus dem Ergebnis aus c) für diesen Fall die Fourier-Koeffizienten!

Aufgabe 4 (*)

Es sei $a \in \mathbf{R}$ und f eine 2π-periodische Funktion mit $f(x) = \sin ax$ für $0 \le x < 2\pi$.

Entwickeln Sie f in eine Fourier-Reihe.
Welchen Wert hat die Fourier-Reihe an der Stelle $x = 0$?

Hinweis: Beachten Sie, dass die Funktion $f(x)$ unstetig im Ursprung ist.

Aufgabe 5

Nachfolgend sind Paare von 2π-periodischen Funktionen mit ihren vermeintlichen Fourier-Reihen gegeben. Die Fourier-Reihen haben je einen Fehler. Skizzieren Sie die Funktionen und finden Sie den Fehler in der Fourier-Reihe!

Hinweis: Es handelt sich um einen systematischen Fehler, wie z.B. Verstöße gegen die Symmetrie oder Periodizitätseigenschaft.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad 0 \le x < \pi \\ 0 & \textit{für} \quad \pi \le x < 2\pi \end{cases}$ und $f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right)$

b) $f(x) = \left|\cos\frac{x}{2}\right|$ für $-\pi \le x < \pi$ und $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin(2x)}{1\cdot 3} + \frac{\sin(3x)}{2\cdot 4} + \cdots\right)$

c) $f(x) = x$ für $0 < x < 2\pi$ und $f(x) = 2\pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \cdots\right)$

d) $f(x) = x$ für $-\pi \le x < \pi$ und $f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\cos x}{1} + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{2} + \cdots\right)$

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Fourier-Reihe des Signals, dass sich durch Einweggleichrichtung einer Sinusschwingung ergibt:

$$f(t) = \begin{cases} 0 \quad \textit{für} \quad -\frac{T}{2} \le t < 0 \\ \sin(\omega t) \quad \textit{für} \quad 0 \le t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Dabei ist $f(t+T) = f(t)$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Aufgabe 7

Geben Sie die Fourier-Reihen der folgenden Funktionen in komplexer Form an!

a) $f(x) = e^{-|x|}$ für $-\pi \le x < \pi$

Dabei ist $f(x + 2\pi k) = f(x)$ für alle $x \in \mathbf{R}$ und $k \in \mathbf{Z}$

b) $f(x) = e^{-|x|}$ für $-1 \le x < 1$

Dabei ist $f(x + 2k) = f(x)$ für alle $x \in \mathbf{R}$ und $k \in \mathbf{Z}$

Aufgabe 8

Gegeben sei die 2-periodische Funktion $f(t) = C(e^t - 1)$ mit $0 \le t < 2$.

a) Skizzieren Sie die Funktion.

b) Berechnen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten.

c) Berechnen Sie mit Hilfe von b) die reellen Fourierkoeffizienten.

d) Zeichnen Sie das Amplitudenspektrum.