Aufgabe 1:

a) Nach Ausführung der inneren y-Integration ergibt sich:

$$I = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x^5 \right) dx$$

Die anschließende Integration über x liefert: $I = \frac{1}{8}$.

b) Das Integrationsgebiet ist die Fläche zwischen der Winkelhalbierenden $y = x$ und der Normalparabel $y = x^2$ für x zwischen 0 und 1.

Aufgabe 2:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \int_{\frac{x}{2}}^{y} xz\ dzdydx = ... = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{8}x^3 \right) dydx = ... = \int_0^1 \left(\frac{1}{6}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{7}{2}} \right) dx = ... = \frac{5}{252}.$$

Aufgabe 3:

Die Integration kann sowohl in kartesischen Koordinaten als auch in ebenen Polarkoordinaten ausgeführt werden.
In ebenen Polarkoordinaten ergibt sich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r\cos\varphi r\sin\varphi\ r\ drd\varphi = ... = \frac{1}{4}R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi\ d\varphi = ... = \frac{R^4}{8}.$$

Aufgabe 4:

Volumen in Zylinderkoordinaten:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-r^2} r\ dzdrd\varphi = ... = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 5:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{e^r}^{e} r\ dzdrd\varphi = ... = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (re - re^r)\, drd\varphi.$$

Denn zweiten Teil des Integrals über r berechnet man am besten mit Hilfe partieller Integration:

$$\int re^r dr = re^r - \int e^r dr = e^r(r-1) + C.$$

Damit erhält man $V = \pi(e-2)$.

Aufgabe 6:

Für die Festlegung der Intregrationsgrenzen müssen zunächst die beiden Schnittpunkte der beiden Parabeln berechnet werden. Gleichsetzen der Funktionsgleichungen ergibt:

$$S_1 = (-1, -1) \text{ und } S_2 = (1, -1)$$

Aus Symmetriegründen gilt: $x_s = 0$.

$$y_s = \frac{1}{A} \int\int_{(A)} y \, dA.$$

$$A = \int_{-1}^{+1} \left((2 - 3x^2) - (-x^2) \right) dx = ... = \frac{8}{3}.$$

Damit erhält man: $y_s = \frac{3}{8} \int_{-1}^{12} \int_{-x^2}^{-3x^2} y \, dydx = ... = \frac{3}{5}$.

Aufgabe 7:

Aus Symmetriegründen gilt: $x_s = 0$.

$$y_s = \frac{1}{A} \int\int_{A} y \, dA$$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = ... = 2$$

$$y_s = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\cos x} y \, dy = ... = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$$

Mit der Beziehung $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ erhält man schließlich: $y_s = \frac{\pi}{8} \approx 0,39$.

Aufgabe 8:

Aus Symmetriegründen gilt: $x_s = 0$.

$$A = \frac{1}{2} \left((2a)^2 \pi - a^2 \pi \right) = \frac{3}{2} a^2 \pi$$

Das Flächenintegral wertet man am besten in ebenen Polarkoordianten aus:

$$y_s = \frac{1}{A} \int_{0}^{\pi} \int_{a}^{2a} r \sin \varphi r \, dr d\varphi = ... = \frac{28}{9\pi} a \approx 0,99a.$$

Aufgabe 9:

Die Fläche zwischen den beiden Kurven ergibt sich zu:

$$A = \int_0^2 \left(4x - x^3\right) dx = ... = 4$$

Damit berechnen sich die Koordinaten des Flächenschwerpunktes als:

$$x_s = \frac{1}{4} \int_0^2 \int_{x^3}^{4x} x \; dydx = ... = \frac{16}{15} \approx 1,07$$

$$y_s = \frac{1}{4} \int_0^2 \int_{x^3}^{4x} y \; dydx = ... = \frac{64}{21} \approx 3,05$$

Aufgabe 10:

Aus Symmetriegründen gilt: $y_s = 0, z_s = \dfrac{h}{2}$
Das Volumen des halben Zylinders ist:

$$V = \frac{1}{2} R^2 \pi h$$

$$x_s = \frac{2}{R^2 \pi h} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^h \int_0^R r \cos\varphi r \; drdzd\varphi = ... = \frac{4R}{3\pi} \approx 0,42R$$

Aufgabe 11:

a) Aus Symmetriegründen gilt: $x_s = 0, y_s = 0$

Das Volumen der halben Kugelschale beträgt:

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R_a^3 - \frac{4}{3}\pi R_i^3\right) = \frac{2}{3}\pi \left(R_a^3 - R_i^3\right)$$

Kugelkoordinaten:

$$z_s = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{R_i}^{R_a} r \sin\vartheta \; r^2 \cos\vartheta \; drd\vartheta d\varphi = ... = \frac{3}{8} \frac{R_a^4 - R_i^4}{R_a^3 - R_i^3}$$

b) <u>nein!</u>

Die Halbkugel hat bei unterschiedlichen Werten von z als Schnittflächen Kreisringe mit unterschiedlichen Radien und damit unterschiedlichen Massen. Deshalb ist der Flächenschwerpunkt in der y-z-Ebene im Allgemeinen nicht identisch mit dem Volumenschwerpunkt.