Aufgabe 1:

a) $$\partial_x f = \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{y}\right)} \cos\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y}$$

$$\partial_y f = \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{y}\right)} \cos\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

b) $$\partial_x f = e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right) + e^{\frac{x}{y}} \sqrt{4-x^2-y^2}\,(4-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot x$$

$$\partial_y f = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) \ln\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right) + e^{\frac{x}{y}} \sqrt{4-x^2-y^2}\,(4-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot y$$

c) $$\partial_x f = \frac{1}{1+(xy^2+3y+-x^2)^5}\,\frac{5}{2}\,(xy^2+3y-x^2)^{\frac{3}{2}}\,(y^2-2x).$$

$$\partial_y f = \frac{1}{1+(xy^2+3y+-x^2)^5}\,\frac{5}{2}\,(xy^2+3y-x^2)^{\frac{3}{2}}\,(2xy+3).$$

Aufgabe 2:

a) $D = \mathbb{R}^2$

b) Die Nulstellen liegen bei $y = x$ oder $y = -x$.
Die Funktionswerte sind größer Null für $|x| > |y|$ und kleiner Null für $|x| < |y|$.

c) Wird durch Nachrechnen gezeigt.

Aufgabe 3:

Unter Beachtung der Produktregel ergibt sich für $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ und $a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

der Ausdruck $-\dfrac{1}{4a\sqrt{\pi t^3}} \left(1 - \dfrac{x^2}{2a^2 t}\right) e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$

Aufgabe 4:

Die notwendigen Bedingungen für Sattelpunkte, bzw. Extremwerte lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 + 2y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x + 3y^2 = 0 \end{aligned}$$

Durch Kombination der beiden Gelichungen ergibt sich:

$$x\left(1 + \frac{27}{8}x^3\right) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad y\left(1 + \frac{27}{8}y^3\right) = 0$$

Daraus erhält man die kritischen Punkte P$= (0,0)$ und Q$=(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.
Die Berechnung von Δ liefert:

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 36xy - 4$$

Damit ergibt sich für P ein Sattelpunkt und für Q ein relatives Minimum.

Aufgabe 5:

a) Die Querschnittsfläche setzt sich aus einem zentralen Rechteck mit den Seiten $b - 2x$ und $x \sin\alpha$ und zwei flächengleichen Dreiecken am Rand mit der Grundlinie $x\cos\alpha$ und der Höhe $x\sin\alpha$ zusammen. Daraus ergibt sich unmittelbar das angegebene Ergebnis.

b) Die notwendigen Bedingungen für ein Extremum lauten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial x} &= \sin\alpha\ (b - 4x + 2x\cos\alpha) = 0\\ \frac{\partial A}{\partial \alpha} &= x\ (b\cos\alpha - 2x\cos\alpha - x + 2x\cos^2\alpha) = 0\end{aligned}$$

Dividiert man die 1. Gleichung durch $\sin\alpha$, so erhält man $\cos\alpha = \frac{4x-b}{2x}$.

Ersetzt man in der 2. Gleichung $\cos\alpha$, so ergibt sich die Gleichung $x\ (3x - b) = 0$.

Da x nur ein triviales Minimum beschreibt, bleibt als einzige Lösung $x = \frac{b}{3}$.

Das führt dann zu $\alpha = 60°$.

Aufgabe 6:

Mit dem Durchmesser d ergibt sich:

$$\rho(m,d) = \frac{m}{\frac{6}{\pi}d^3}.$$

Damit erhält man die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial m} &= \frac{6}{\pi d^3}\\ \frac{\partial\rho}{\partial d} &= -\frac{18m}{\pi d^4}\end{aligned}$$

Das totale Differenzial liefert:

$$|\Delta\rho_{\max} = \left|\frac{\partial\rho}{\partial m}\ \Delta m\right| + \left|\frac{\partial\rho}{\partial d}\ \Delta d\right| = 0.101\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

Aufgabe 7:

a) Die partiellen Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned}\partial_x f &= 2x\ \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \partial_y f &= \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

Damit liefert das totale Differenzial

$$\Delta z = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}\ \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}\ \Delta y = \frac{5}{2}\sqrt{2}\cdot(-0.1) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 1.0 = \frac{1}{4}\sqrt{2} \approx 0.3535$$

b) Als Verhältnis der partiellen Ableitungen erhält man

$$\frac{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}} = \frac{\frac{5}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 5$$