Aufgabe 1:

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen in x:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^5\ 3^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n(n+2)x^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b^{n^2}\ x^n, \quad b \in \mathbb{C}$ (*)

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)\ x^n$ (*)

Aufgabe 2:

Entwickeln Sie die angegebenen Funktionen $f(x)$ bis zur Ordnung $n = 6$ in eine Potenzreihe um den Punkt x_0.

a) $f(x) = x^5, \quad x_0 = -2$

b) $f(x) = \cos x, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

Aufgabe 3:

Geben Sie die ersten drei nicht verschwindenden Glieder der Taylorreihenentwicklung der Funktion $f(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$ an:

a) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

Aufgabe 4:

Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen. Geben Sie eine Funktion an, die die Potenzreihe in dem Konvergenzbereich darstellt.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}\ x^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$ (*)

Aufgabe 5:

Nutzen Sie Partialbruchzerlegung um die Potenzreihenentwicklung der gegebenen Funktion um einen geeigneten Entwicklungspunkt anzugeben. Bestimmen Sie die Konvergenzbereiche der einzelnen Summanden und interpretieren Sie das Ergebnis!

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 + x - 2}$

b) $f(x) = \frac{5 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der komplexen Potenzreihen und skizzieren Sie den Konvergenzbereich in der komplexen Ebene!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (z-1)^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)} (z-1)^n$

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe. Für welche Werte auf der reellen Achse konvergiert die Potenzreihe?

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+4}{2^n} (z+j)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n} (z-j)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} (z - \frac{1}{2})^n$

Aufgabe 8:

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mit Hilfe der Taylorreihe bis einschließlich $O(x^4)$.

a) $\int \cos(x^2) e^x \, dx$

b) $\int \frac{1}{1 - \sin x} \, dx$

Aufgabe 9:

Bestimmen Sie mit Potenzreihenentwicklung folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2 e^x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 \sin x}{(1 - \cos x)^2}$