Lösungshinweise zu Vektoren WS 05/06 (Prof. Zacherl/ Prof. Hollmann)

Aufgabe 1

a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$

b) –2

c) nicht definiert

d) $\begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Die Fläche des Parallelogramms ist der Betrag des Vektorprodukts: 49

Aufgabe 3

Die 4 Punkte führen zu 3 Verbindungsvektoren.

z.B.: $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{PR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{PT} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Damit erhält man das Spatvolumen 27.

Aufgabe 4

Es gilt: $\vec{a} \circ \vec{b} = 0, \vec{a} \circ \vec{c} = 0, \vec{b} \circ \vec{c} = 0$

Damit sind die Vektoren jeweils paarweise orthogonal, sie spannen also einen Quader auf.

$V = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| = 15 \cdot 15 \cdot 3 = 675$

Aufgabe 5

Aus dem Skalarprodukt ergibt sich die quadratische Gleichung: $x^2 + 2x - 3 = 0$

Lösungen: $x_1 = 1, x_2 = -3$

Aufgabe 6

Das Volumen wird maximal, wenn $\vec{c}$ (als Höhe) senkrecht auf der Fläche steht, die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

$\vec{c}$ muss also in Richtung des Vektorprodukts zeigen. Da $\vec{c}$ zugleich Einheitsvektor sein soll, verbleiben zwei Lösungen:

$$\vec{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

Es muss gelten: $\vec{v}_3 \perp \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3 \perp \vec{v}_2$

Rechenregel gilt nicht allgemein.

z.B.: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Damit erhält man: $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also verschiedene Ergebnisse.

Aufgabe 7

a) Durch Ausmultiplizieren der Klammern und unter Berücksichtigung von $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ und $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ ergibt sich die Behauptung.

b) Die Diagonalen $\vec{a} - \vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{b}$ in einem Parallelogramm, das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, bilden ihrerseits wieder ein Parallelogramm, dessen Fläche genau doppelt so groß ist wie die Fläche des ursprünglichen Parallelogramms.