Lösungshinweise zu Determinanten / Inverser Matrix
WS 05/06 Prof.Zacherl / Prof. Hollmann

Aufgabe 1

a) $\det A = (b-a)c^2 + (c-b)a^2 + (a-c)b^2$
b) $\det A = 2 \neq 0$ d.h. A ist invertierbar

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & \dots & \dots \\ \dots & 8 & \dots \\ \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

a) $\det A = -1 \neq 0$ d.h. A ist invertierbar

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{x} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Elementare Zeilenumformungen führen zur Matrix B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Durch Entwicklung nach der ersten Spalte erhält man:

det B = det A = -3

Aufgabe 4

a) A ist obere Dreiecksmatrix.
$\det A = 1 \cdot 3 \cdot 4 = 12 \neq 0$ d.h. A regulär

b) $A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 8 & -7 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ oder } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \text{ oder } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ usw.}$$

Aufgabe 6

a) Durch eine elementare Zeilenumformung und Entwicklung nach der ersten Spalte ergibt sich det C = 17.

b) Zu berechnen:

$$D_{13} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Damit: $C^{-1}{}_{31} = \dfrac{1}{\det C} \cdot (-1)^{1+3} \cdot D_{13} = \dfrac{2}{17}$

Aufgabe 7

a) $\det(2A) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \det A = 16$

b) $\det(-A) = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \det A = -2$

c) Allgemein gilt: $1 = \det(E) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$

also: $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

damit: $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{2}$

d) $\det(A \cdot A^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) = \det(A) \cdot \det(A) = 4$

Aufgabe 8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \det A = 7$$

$x_1 = \dfrac{1}{7}$; $\quad x_2 = \dfrac{2}{7}$; $\quad x_3 = \dfrac{4}{7}$;