Aufgaben zu Matrizen WS 05/06 Prof.Zacherl / Prof. Hollmann

Aufgabe 1

Gegeben seien die Matrizen A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ und B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie AB und BA.
b) Berechnen Sie C = A A^T.
c) Welche besondere Eigenschaft hat C ?
Zeigen Sie das diese Eigenschaft von C für jede beliebige Matrix A gilt.

Aufgabe 2

Geben Sie die (3x3) – Matrix A = (a_{ik}) mit den Matrixelementen a_{ik} = i + k an.
Welchen Rang hat die Matrix A ?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen

A = $\begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $a \in R$, B = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

Sei A = $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \\ b & c \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in R$

Welchen Rang hat die Matrix A ?

Aufgabe 5

Gegeben sind die Matrizen A = $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ und B = $\begin{pmatrix} x & y \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie reelle Werte x und y so, dass gilt: AB = BA.

Aufgabe 6

Seien A = $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ und B = $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

Für welche Winkel α gilt ?

a) A ist symmetrisch.
b) AB = BA

Aufgabe 7

Sei A $\vec{x} = \vec{c}$ ein lineares Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix A.
A sei eine (4 x 5)-Matrix, d.h. hat 4 Zeilen und 5 Spalten.

(Geben Sie bei den folgenden Antworten jeweils eine Begründung)

a) Wie viele Gleichungen bzw. Unbekannte hat das zugehörige Gleichungssystem ?
b) Was ist der maximale Rang von A ?
c) Kann das Gleichungssystem genau eine Lösung haben ?
d) Kann das Gleichungssystem keine Lösung haben ?
e) Welche Werte haben rang(A) und rang(A| $\vec{c}$), wenn das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen mit 2 freien Parametern hat ?

Aufgabe 8

a) Kann es vorkommen, dass bei einem linearen Gleichungssystem A $\vec{x} = \vec{c}$ mit 4 Gleichungen für 6 Unbekannte eine Lösungsmenge mit 3 freien Parametern vorliegt ? (Begründung)
b) Kann es vorkommen, dass ein lineares Gleichungssystem A $\vec{x} = \vec{c}$ mit 4 Gleichungen für 5 Unbekannte und rang(A) = 4 unlösbar ist ? (Begründung)

Aufgabe 9

Bilden die folgenden Vektoren eine Basis des R^3 ?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10

Untersuchen Sie, ob die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind ?

Aufgabe 11

Zeigen Sie, dass es keinen Wert $\lambda \in R$ gibt, so dass die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ linear abhängig sind.