Lösungshinweise zu Differenzialgleichungen — SS 2006
Prof. Hollmann (ET), Prof. Zacherl (AW)

Aufgabe 1

Durch Trennung der Variablen erhält man das Ergebnis $y \cdot e^{3y} = Ce^{x^2}$.

Aufgabe 2

a) Integration nach Trennung der Variablen liefert $y(x) = -\frac{C}{4}\left(4 + x^2\right)^{-4} + \frac{1}{4}$.

b) Mit dem Anfangswert berechnet man $C = 4^4$.

Aufgabe 3

Zunächst findet man mit Trennung der Variablen und einer partiellen Integration

$$y(x) = \frac{1}{x\cos x - \sin x + C}.$$

Einsetzen des Anfangswertes liefert $C = 3$.

Aufgabe 4

a) Trennung der Variablen führt zu $y(x) = -\ln(C - \sin x).)$

b) Mit dem Anfangswert bestimmt man $C = 1$.

c) Die Lösung ist nicht definiert für $\sin x = C$.

Aufgabe 5

Die Substitution $u = \frac{y}{x}$ führt zu der Differenzialgleichung $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}(1-u)^2$.

Mit Trennung der Variablen und Rücksubstitution findet man $y(x) = x\left(1 - \frac{1}{\ln|x| + C}\right)$.

Aufgabe 6

Es handelt sich um eine lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Man löst zuerst die homogene Differenzialgleichung.

Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4}$.

Damit ist $\lambda = -\frac{1}{2}$ doppelte Nullstelle der charakteristischen Gleichung und die homogene Lösung ergibt sich zu

$$y_h(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung erhält man mit der Methode „Variation der Konstanten".

Das heißt, der Ansatz $y_p(x) = C_1(x) e^{-\frac{1}{2}x}$ führt auf eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung für $C_1(x)$:

$$C_1'' = \frac{1}{x^2}.$$

Nach Lösen dieser Differenzialgleichung hat man die spezielle Lösung

$$y_p(x) = -\ln x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

errechnet und die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} - \ln x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Aufgabe 7

Es handelt sich um eine lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung. Die Koeffizienten sind nicht konstant.
Zunächst berechnet man die Lösung $y_h(x)$ der homogenen Differenzialgleichung

$$-6x^2 y + 4x^3 y' - x^4 y'' = 0,$$

indem man den Ansatz $y(x) = x^m$ einsetzt. Man erhält die quadratische Gleichung

$$m^2 - 5m + 6 = 0.$$

Die Gleichung hat die Lösungen $m_1 = 2$ und $m_2 = 3$.

Somit ist $y_h(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3$.

Die spezielle Lösung berechnet man mit dem Ansatz $y_p(x) = C_1(x) x^2$:

$$y_p(x) = -\frac{1}{12x} - \frac{1}{20x^2}.$$

Die Gesamtlösung ist damit

$$y_p(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3 - \frac{1}{12x} - \frac{1}{20x^2}.$$

Aufgabe 8

Trennung der Variablen führt zu der Lösung $y(x) = C(1+x)$. D.h. bei der Lösungsschar handelt es sich um Geraden mit der Steigung und dem Achsenabschnitt C.
Ist $y' = f(x,y)$ die Differenzialgleichung, so lautet die Differenzialgleichung für die orthogonale Kurvenschar

$$y' = -\frac{1}{f(x,y)}.$$

Hier findet man für die orthogonale Kurvenschar die Gleichung

$$y' = -\frac{1+x}{y}.$$

Die Lösungsschar lässt sich folgendermaßen schreiben:

$$y^2 + (x+1)^2 = K.$$

Es handelt sich also um Kreise mit Mittelpunkt (-1,0).

Aufgabe 9

Die Gesamtlösung dieser linearen Differenzialgleichung 1. Ordnung ergibt sich als Summe der homogenen Lösung $y_h(x)$ und einer speziellen Lösung $y_p(x)$.
Für die homogene Lösung findet man

$$y_h(x) = -\frac{C}{x}.$$

Die spezielle Lösung erhält man mit Variation der Konstanten aus dem Ansatz

$$y_p(x) = -\frac{C(x)}{x}.$$

Die Differenzialgleichung für $C(x)$:

$$C' = -2\ln x$$

liefert die spezielle Lösung

$$y_p(x) = 2\ln x - 2,$$

so dass die Gesamtlösung

$$y(x) = -\frac{C}{x} + 2\ln x - 2$$

ist.

Die Bedingung $y'(1) = -1$ wird von der Integrationskonstante $C = -3$ erfüllt.

Aufgabe 10

Die homogene Lösung $y_h(x)$ der Differentialgleichung 1. Ordnung ist

$$y_h(x) = \frac{C}{x}.$$

für die spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung findet man mit „Variation der Konstanten"

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}\frac{\cos(x^2)}{x}.$$

Damit ist die Gesamtlösung

$$y(x) = \frac{C}{x} - \frac{1}{2}\frac{\cos(x^2)}{x}.$$

Aufgabe 11

Mit der Substitution $z = y^2$ vereinfacht sich die Differenzialgleichung für die abhängige Variable y zu der der folgenden Differenzialgleichung für z:

$$z'' = 2.$$

Lösen dieser Gleichung und anschließende Rücksubstitution ergibt

$$y^2 = x^2 + C_1 x + C_2.$$

Einsetzten des Anfangswertes $y(0) = 1$ liefert $C_2 = 1$.

Wenn $y = -x + 1$ Tangente an die Lösungskurve sein soll, so muss sicher gestellt sein, dass die Tangente mit der Lösungskurve einen gemeinsamen Punkt hat und die Steigung der Lösungskurve muss identisch mit der Steigung der Tangente sein, also $y'(0) = -1$.

Diese Bedingung legt C_1 zu $C_1 = -2$ fest.

Aufgabe 12

Die dritte Gleichung des Systems von Differenzialgleichungen erster Ordnung kann sofort integriert werden:

$$z(t) = \frac{1}{C_1 - t}.$$

Kennt man die Lösung für z, so können auch die Gleichungen für y und x integriert werden.
Die Lösungen sind

$$y(t) = \frac{C_2}{C_1 - t} \text{ und } x(t) = \frac{C_3}{C_1 - t}.$$

Eliminiert man den Parameter t aus den Lösungen, so erhält man $x = C_3 z$ und $y = C_2 z$.

Diese beiden Ebenengleichungen definieren eine Gerade, die Schnittgerade.

Aufgabe 13

Es handelt sich um ein System von drei linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung. Entsprechend stehen zwei Lösungsmethoden zur Verfügung.

a) Man leitet eine äquivalente Differenzialgleichung 3. Ordnung her, löst sie und berechnet aus der Lösung die fehlenden Lösungsbestandteile:

   Mit zweimaligem Ableiten der Differenzialgleichung für y und Einsetzten der Differenzialgleichungen für x und z findet man

$$y^{(3)} - \ddot{y} + \dot{y} - y = 0.$$

   Dieser Differenzialgleichung ist das charakteristische Polynom

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$$

   zugeordnet. Die Nullstellen der Gleichung sind $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = j$ und $\lambda_3 = -j$.
   Damit löst

$$y(t) = C_1 e^t + \tilde{C}_2 e^{jt} + \tilde{C}_3 e^{-jt}$$

   die Differenzialgleichung für $y(t)$.
   Die reelle Form dieser Lösung lautet

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 \sin t + C_3 \cos t .$$

Leitet man y nach t ab, so findet man

$$z(t) = C_1 e^t - C_3 \sin t + C_2 \cos t .$$

Für die Lösungskurve $x(t) = z - \dot{z}$ findet man

$$x(t) = (C_2 + C_3)\cos t + (C_2 - C_3)\sin t .$$

Die Anfangswerte legen die Integrationskonstanten fest: $C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = 1$.

b) Man behandelt die drei Differentialgleichungen als lineares System von Differentialgleichungen

$$\dot{\underline{v}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{v} \text{ , mit } \underline{v} = (x, y, z)^T \text{ und } \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = j$ und $\lambda_3 = -j$.
Die Eigenvektoren $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ und $\underline{v}_3$ errechnet man zu

$$\underline{v}_1 = (0,1,1)^T, \underline{v}_2 = (j+1,1,j)^T, \underline{v}_3 = (1-j,1,-j)^T .$$

Damit ist die Lösung des Systems von Differenzialgleichungen

$$\underline{v}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} j+1 \\ 1 \\ j \end{pmatrix} e^{jt} + C_3 \begin{pmatrix} 1-j \\ 1 \\ -j \end{pmatrix} e^{-jt} .$$

Mit den Anfangswerten findet man $C_1 = 1, C_2 = \frac{1}{2} = C_3$.

Aufgabe 14

Es handelt sich um sein System von drei linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung. Entsprechend stehen zwei Lösungsmethoden zur Verfügung.

a) Die äquivalente Differenzialgleichung 2. Ordnung für $y(t)$ ist

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 4 .$$

Der Differenzialgleichung ist das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

zugeordnet. Die Gleichung hat die doppelte Nullstelle $\lambda_{1/2} = -2$.

Damit löst

$$y_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$$

die homogene Differenzialgleichung.
Eine spezielle Lösung y_p ist $y_p(t) = 1$.
Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist also

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} + 1.$$

Es folgt

$$z(t) = 4 - \dot{y} - 3y = 1 - C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-2t} - C_2 t e^{-2t}.$$

Die Anfangswerte legen die Integrationskonstanten zu $C_1 = 0$ und $C_2 = 0$ fest.

b) Man behandelt die zwei Differentialgleichungen als lineares System von Differentialgleichungen

$$\dot{\underline{v}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{v} + \underline{b} \text{ , mit } \underline{v} = (y, z)^T \text{ ,} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = (4{,}0)^T.$$

Die Eigenwerte der Matrix $\underline{\underline{A}}$ sind $\lambda_{1/2} = -2$.

Damit bestimmt man die Lösung des homogenen Differenzialgleichungssystem mit folgendem Ansatz:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_{11} + v_{12} t \\ v_{21} + v_{22} t \end{pmatrix} \cdot e^{-2t}.$$

Einsetzen des Ansatzes in das System von Differenzialgleichungen und anschließender Koeffizientenvergleich in Potenzen von t führt zu $v_{11} = -(C_1 + C_2), v_{12} = -v_{22} = C_1$ und $v_{21} = C_2$.

Damit ist die homogene Lösung

$$\underline{v}_h(t) = \begin{pmatrix} -(C_1 + C_2) + C_1 t \\ C_2 - C_1 t \end{pmatrix} \cdot e^{-2t}.$$

Eine spezielle Lösung ist $\underline{v}_p(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Anfangswerte $y(0) = 1$ und $z(0) = 1$ liefern $C_1 = C_2 = 0$ und damit $y(t) = z(t) = 1$.

Aufgabe 15

a) Die charakteristische Gleichung lässt sich über die Hauptunterdeterminanten berechnen:

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{Id}}) = \lambda^4 - \lambda^3(0+0+0+0)$$

$$+\lambda^2\left[\det\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]$$

$$-\lambda\left[\det\begin{pmatrix}0 & -b & a\\ b & 0 & 0\\ -a & 0 & 0\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}0 & a & -b\\ -a & 0 & 0\\ b & 0 & 0\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}0 & 0 & -b\\ 0 & 0 & a\\ b & -a & 0\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}0 & 0 & a\\ 0 & 0 & -b\\ -a & b & 0\end{pmatrix}\right]$$

$$+\det\begin{pmatrix}0 & 0 & a & -b\\ 0 & 0 & -b & a\\ -a & b & 0 & 0\\ b & -a & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \lambda^4 + 2(a^2+b^2)\lambda^2 + (a^2-b^2)^2 = 0$$

b) Man findet die Eigenwerte

$$\lambda_1 = j(|a|+|b|), \lambda_2 = -j(|a|+|b|), \lambda_3 = j(|a|-|b|), \lambda_4 = -j(|a|-|b|).$$

c) Die Differenzialgleichung 4. Ordnung ist

$$y^{(4)} + 2(a^2+b^2)y'' + (a^2-b^2)y = 0$$

mit reeller Lösung

$$y(t) = C_1\cos(|a|+|b|)t + C_2\sin(|a|+|b|)t + C_3\cos(|a|-|b|)t + C_4\sin(|a|-|b|)t\ .$$

d) Ist $|a| = |b|$, so ergibt sich

$$y(t) = C_1\cos(|a|+|b|)t + C_2\sin(|a|+|b|)t + C_3 + C_4 t$$

als allgemeine Lösung.

e) Ist $b = 0$ so erhält man

$$y(t) = C_1\cos|a|t + C_2\sin|a|t + C_3 t\cos|a|t + C_4 t\sin|a|t.$$