Aufgaben zu Differenzialgleichungen **SS 2006**
Prof. Zacherl (AW)

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der folgenden Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$y' = 2xy - 3yy'.$$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ der folgenden Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$(x^2 + 4)y' = 2x - 8xy.$$

b) Welche Lösung erhält man mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ der folgenden Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$y' = xy^2 \sin x$$

unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ der Differenzialgleichung 1. Ordnung $y' = e^y \cos x$.

b) Wie lautet die Lösung für die Anfangsbedingung $y(-\frac{\pi}{2}) = -\ln 2$?

c) Für welche Werte ist die Lösung nicht definiert?

Aufgabe 5

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichung

$$x^2 y' = x^2 - xy + y^2.$$

(*) kennzeichnet eine Aufgabe mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad

Aufgabe 6

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichung:

$$y''+y'+\frac{1}{4}y=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{x}{2}}$$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die vollständige Lösung der Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$-6x^2y+4x^3y'-x^4y''=x+1.$$

Hinweis: Verwenden Sie zur Bestimmung der Lösung der homogenen Differenzialgleichung den Ansatz $y(x)=x^m$.

Aufgabe 8

Vorgelegt sei die Differenzialgleichung

$$y'=\frac{y}{1+x}.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

b) Skizzieren Sie die Lösungsschar!

c) Die allgemeine Form der Differenzialgleichung für die orthogonale Kurvenschar lautet $y'=-\frac{1}{f(x,y)}$. Stellen Sie die Differenzialgleichung für die orthogonale Kurvenschar für die oben gegebene Differenzialgleichung auf! Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung.

d) Welche geometrische Form haben die Lösungskurven?

Aufgabe 9

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der inhomogenen linearen Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$xy'+y=2\ln x$$

b) Welche Lösung ergibt sich für die Anfangsbedingung $y'(1)=-1$

Aufgabe 10

Vorgelegt sei die inhomogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$y' + \frac{y}{x} = \sin(x^2).$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung und skizzieren Sie die Lösungsschar.

b) Bestimmen Sie durch Variation der Konstanten eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung.

c) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung an.

Aufgabe 11

Aus dem allgemeinen Integral der Gleichung

$$yy'' + y'^2 = 1$$

ist diejenige Integralkurve zu berechnen, die durch den Punkt P=(0,1) geht und dort die Tangente $x + y = 1$ besitzt.

<u>Hinweis:</u> Substituieren Sie $z = y^2$

Aufgabe 12

a) Bestimmen Sie die vollständige Lösung für das folgende System nichtlinearer Differenzialgleichungen 1. Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = xz$$
$$\frac{dy}{dt} = yz$$
$$\frac{dz}{dt} = z^2$$

b) Eliminieren Sie den Parameter t aus der Lösung. Worum handelt es sich bei der gefundenen Lösungskurvenschar?

Aufgabe 13 (*)

Bestimmen Sie die Lösungsfunktionen für das nachfolgende gekoppelte System von Differenzialgleichungen 1. Ordnung

$$\dot{x} = z - y$$
$$\dot{y} = z$$
$$\dot{z} = z - x$$

Hierbei sind die folgenden Anfangswerte zu Grunde zu legen: $x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 1$.

Aufgabe 14

Bestimmen Sie die Lösungen $y(x)$ und $z(x)$ für das System linearer Differenzialgleichungen mit den Anfangswerten $y(0) = 1$ und $z(0) = 1$:

$$\dot{y} + 3y + z = 4$$
$$\dot{z} - y + z = 0$$

Aufgabe 15 (*)

Vorgelegt ist das homogene System linearer Differenzialgleichungen für den Systemvektor $\underline{x}(t)$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\underline{x} \ , \qquad \text{mit} \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & -b & a \\ -a & b & 0 & 0 \\ b & -a & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a, b sind reelle Zahlen.

a) Bestimmen Sie die charakteristische Gleichung des Systems von Differenzialgleichungen.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte des Systems von Differenzialgleichungen für den allgemeinen Fall $a^2 \neq b^2, a \neq 0, b \neq 0$.

c) Ordnen Sie dem System von Differenzialgleichungen 1. Ordnung eine Differenzialgleichung 4. Ordnung zu und bestimmen Sie deren allgemeine reelle Lösung.

d) Welche Lösungen ergeben sich für den oben ausgeschlossenen Fall $b^2 = a^2$?

e) Welche Lösung erhält man für $b = 0$?