Aufgabe 1

Durch Integration der Differenz $f_n(x)$ - $f_{n+1}(x)$ in den Grenzen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ ergibt sich für die Fläche:

$A(n) = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ mit dem Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} A(n) = 0$

Aufgabe 2

a) Substituiere u = 2x $\Rightarrow$ $\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1$

b) Setze sin 2x = 2 sinx cos x
Damit ist $\int \sin 2x dx = 2\int \sin x \cos x dx = \sin^2 x + C_2$
Also $C_2 = C_1 - \frac{1}{2}$

Aufgabe 3

Mit Hilfe des Additiontheorems $\sin(\omega t + \varphi) = \sin \omega t \cdot \cos\varphi + \cos\omega t \cdot \sin\varphi$ ergibt sich

$$W = u_0 i_0 \left(\cos\varphi \underbrace{\int_0^T \sin^2 \omega t dt}_{I_1} + \sin\varphi \underbrace{\int_0^T \sin\omega t \cos\omega t dt}_{I_2} \right)$$

Das Integral I_1 löst man mit der Substitution u = ω t und anschließender partieller Integration.
Man erhält $I_1 = \frac{T}{2}$.
Das Integral I_2 löst man mit der Substitution u = ω t und anschließender Anwendung der Formeln für spezielle Integrandenfunktionen. Man erhält $I_2 = 0$.

Damit ergibt sich schließlich: $W = \frac{1}{2} u_0 i_0 T \cos\varphi$.

Aufgabe 4

Bei der zweifachen Produktintegration muß darauf geachtet werden, dass jeweils der identische Funktionstyp (d.h. trigonometrische Funktion bzw. Hyperbelfunktion) für f(x) bzw. g'(x) verwendet wird.
Damit ergibt sich: $\int \cos x \cosh x dx = \sin x \cosh x + \cos x \sinh x - \int \cos x \cosh x dx$

Umgeformt: $\int \cos x \cosh x dx = \frac{1}{2}(\sin x \cosh x + \cos x \sinh x) + C$

Aufgabe 5

Bei allen drei Teilaufgaben erhält man über eine Partialbruchzerlegung und eine anschließende Integration das Ergebnis.

a) Nullstellen des Nenners: 1 ; -1 ; 2 ; -2

Man erhält damit:

$$\frac{x}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}\right)$$

Nach der Integration ergibt sich:

$$\int \frac{x}{x^4 - 5x^2 + 4} dx = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}\right| + C$$

b) Nullstellen des Nenners: 1 ; -1 ; 3

Man erhält damit:

$$\frac{6x^2 - 26x + 8}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{3}{x-1} + \frac{5}{x+1} - \frac{2}{x-3}$$

Nach der Integration ergibt sich:

$$\int \frac{6x^2 - 26x + 8}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx = \ln\left|\frac{(x-1)^3 (x+1)^5}{(x-3)^2}\right| + C$$

c) Nullstellen des Nenners: 0 (dreifach) ; + j ; - j

Man erhält damit:

$$\frac{x^4 + x^2 + x + 2}{x^5 + x^3} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{2x-1}{x^2 + 1}$$

Der letzte Partialbruch wird zur Integration nochmals in zwei Teilbrüche zerlegt.

Nach der Integration ergibt sich:

$$\int \frac{x^4 + x^2 + x + 2}{x^5 + x^3} dx = -\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln(x^2 + 1) - \arctan x + C$$

Aufgabe 6

Die Substitution u = $\sqrt{x}$ führt zum Integral $2\int_0^\infty ue^{-u}\,du$.

Partielle Integration liefert dann:

$$2\int_0^\infty ue^{-u}\,du = 2\left\{\underbrace{\left[-ue^{-u}\right]_0^\infty}_{0} + \underbrace{\int_0^\infty e^{-u}\,du}_{\underbrace{\left[-e^{-u}\right]_0^\infty}_{1}}\right\} = 2$$

Aufgabe 7

Setze $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ und $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.

Es gilt: $A = \dfrac{1}{2}\int_0^\infty (x\dot{y} - y\dot{x})dt = \dfrac{1}{4}\int_0^\infty (-3e^{-t} + e^{-3t})dt = -\dfrac{2}{3}$