Lösungshinweise zur Differenzialrechnung **WS 06/07**
(Prof. Zacherl/ Prof. Hollmann)

Aufgabe 1

Der Gewinn müsste im Jahr 2005 um 33,3 % steigen.

Aufgabe 2

Durch wiederholte Anwendung der Kettenregel und teilweise etwas aufwendige Umformungen erhält man:

a) $y' = 3\sin^2 x \cos x - 2\tan x$

b) $y' = -\dfrac{6x\sinh(x^2)}{\cosh^4(x^2)}$

c) $y' = 6x\sinh^2(x^2)\cosh(x^2)$

d) $y' = -e^x \tan(e^x)$

e) $y' = \dfrac{1}{4\sqrt{x}} \dfrac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}}}$

f) $y' = -\dfrac{2x}{1 - x^4}$

g) $y' = -\dfrac{1}{x\ln x}$

h) $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ Hinweis: Vor dem Differenzieren mit $a + \sqrt{a^2 - x^2}$ erweitern !

i) $y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Aufgabe 3

Zu zeigen durch Nachrechnen:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x}\right)\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Aufgabe 4

Logarithmische Ableitung liefert:

a) $y' = \left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + \frac{x^2}{x^2+1} \right) \left(\sqrt{x^2+1}\right)^x$

b) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2} \ln x + 1 \right) x^{\sqrt{x}}$

c) $y' = -\frac{1}{x^2} \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right) \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

d) $y' = \left(\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} + 1 \right) (\sin x)^{\tan x}$

Aufgabe 5

a) $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -t$

b) $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{(1+2\varphi)\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{(1+2\varphi)\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}$

Aufgabe 6

Durch implizites Differenzieren und Auflösen nach y’ erhält man:

a) $y' = \frac{-10xy^4 - 2x\sin y}{20x^2y^3 - 8y + x^2\cos y}$

b) $y' = \frac{-6x^2}{e^y + ye^y + 2y}$

c) $y' = \frac{2xy - 2x^2 - 1}{4y^2 - 4xy - 1}$

d) $y' = \frac{\sin y}{2y - x\cos y}$

Aufgabe 7

Die (teilweise wiederholte) Anwendung der Regel von Bernoulli-l'Hospital liefert die folgenden Grenzwerte:

a) $-\frac{1}{2}$

b) -1

c) $\sqrt{2}$

d) 4

e) 0

Aufgabe 8

a) Die zweite Anwendung der Regel von l'Hospital ist nicht zulässig, da die Grenzwerte im Zähler bzw. Nenner $\neq 0$ bzw. $\neq \infty$ sind.

b) Der richtige Grenzwert ist 2 .

Aufgabe 9

a) $D = R_+^{\,0}$, da nach Angabe nur $\omega \geq 0$ betrachtet werden soll.

b) $\omega = 0$ (doppelte Nullstelle)

c) f(ω) hat keine reelle Polstelle.

d) $\lim\limits_{\omega \to \infty} f(\omega) = 1$

e) $\frac{df}{d\omega} = \frac{2\omega - \omega^3}{\left(\omega^2 + (1-\omega^2)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ führt

- zu einem relativen Minimum bei $\omega = 0$ mit f(0) = 0
- zu einem relativen Maximum bei $\omega = \sqrt{2}$ mit $f(\sqrt{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}17$

Aufgabe 10

Schnittpunkt: $x_s = \frac{\pi}{4}$

Die Ableitungen am Schnittpunkt führen mit der Beziehung $f' = \tan\alpha$ zum Schnittwinkel von $\varphi \approx 70{,}5°$ bzw. $\varphi \approx 109{,}5°$.

Aufgabe 11

$$y^{(n)} = \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$$

Aufgabe 12

a) $y' = \dfrac{\cos(2\varphi) + \sin(2\varphi)}{\cos(2\varphi) - \sin(2\varphi)}$

b) waagrechte Tangenten: $\cos(2\varphi) + \sin(2\varphi) = 0$ ergibt: $\varphi_1 = \dfrac{3}{8}\pi$ oder $\varphi_2 = -\dfrac{\pi}{8}$

senkrechte Tangenten: $\cos(2\varphi) - \sin(2\varphi) = 0$ ergibt: $\varphi_1 = \dfrac{5}{8}\pi$ oder $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{8}$

c) $\kappa = \dfrac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{2}$ konstant d.h. Kreis mit Radius $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 13

a) Einsetzen von P (1,1) führt zu C = 3.

b) $y' = \dfrac{-5x^4 + 4x^3 y - 4xy}{-x^4 + 2x^3 + 3y^2}$

c) Tangentengleichung: $y = -\dfrac{5}{4}x + \dfrac{9}{4}$

Aufgabe 14

$$\kappa(x) = \frac{y''}{\sqrt{\left(1 + (y')^2\right)^3}} = \frac{1}{a\left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right)^2} = \frac{a}{y^2} \quad \text{und} \quad \rho = \frac{1}{\kappa(x)}$$

Aufgabe 15

a) $S(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x \le 8000 \\ 0{,}12 \cdot (x - 8000) & 8000 < x \le 16000 \\ 960 + 0{,}24 \cdot (x - 16000) & 16000 < x \le 40000 \\ 6720 + 0{,}36 \cdot (x - 40000) & x > 40000 \end{cases}$

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \\ 0{,}12 \cdot x - 960 & \\ 0{,}24 \cdot x - 2880 & \text{für} \\ 0{,}36 \cdot x - 7680 & \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \le x \le 8000 \\ 8000 < x \le 16000 \\ 16000 < x \le 40000 \\ x > 40000 \end{matrix}$$

b) S(x) ist ein Polygonzug mit den Steigungen 0, 0,12 , 0,24 und 0,36.

c) Es gilt: $D(x) = \dfrac{S(x)}{x}$

$$D(x) = \begin{cases} 0 & \\ 0{,}12 - \dfrac{960}{x} & \\ 0{,}24 - \dfrac{2880}{x} & \text{für} \\ 0{,}36 - \dfrac{7680}{x} & \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \le x \le 8000 \\ 8000 < x \le 16000 \\ 16000 < x \le 40000 \\ x > 40000 \end{matrix}$$

Aufgabe 16

Allgemein gilt: y ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs für alle a.

1.Fall: $a = 0 \Rightarrow y = 3x^5$ d.h. – keine Minima und Maxima
- Wendepunkt mit waagrechter Tangente bei P(0,0)

2.Fall: $a \neq 0$

$$y' = 15x^4 - 15a^2x^2$$
$$y'' = 60x^3 - 30a^2x$$
$$y''' = 180x^2 - 30a^2$$

Damit ergibt sich:

- Wendepunkt mit waagrechter Tangente bei $P_1(0,0)$
- Minimum bei $P_2(a, -2a^5)$ für a > 0 oder Maximum bei $P_2(a, -2a^5)$ für a < 0
- Punktsymmetrisches Maximum bzw. Minimum zu P_2
- Wendepunkte bei $P_3(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{4\sqrt{2}}a^5)$ und $P_4(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{7}{4\sqrt{2}}a^5)$

Aufgabe 17

Vorbemerkung: f(x) ist punktsymmetrisch

a) Nullstellen: x = 0
   Keine reellen Polstellen

b) x-Achse ist Asymptote zu f(x), da f(x) echt gebrochenrationale Funktion ist.

c) $f' = \frac{2(1-4x^2)}{(1+4x^2)^2}$

$$f'' = \frac{16x(4x^2-3)}{(1+4x^2)^3}$$

Daraus ergibt sich:

- relatives Maximum bei $P_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- relatives Minimum bei $P_2(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

e) Es gilt:

$$F(x) = \int \frac{2x}{1+4x^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{8x}{1+4x^2} dx = \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) + C$$