Lösungshinweise zu Grundlagen WS 10/11 Prof. Hollmann, Prof. Zacherl

Aufgabe 1

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{8}$ c) 8 d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{115}{234}$

Aufgabe 2

a) $1{,}375$ b) $2{,}\overline{2}$ c) $2{,}\overline{03}$

Aufgabe 3

a) $-2a-b-3$ b) $b+c-2$ c) $-13a^2+24ab-13b^2$

Aufgabe 4

a) $(8x+7)^2+15$ oder $(8+7x)^2+15x^2$

b) $(4x-5y)^2+75y^2$ oder $(10y-2x)^2+12x^2$

Aufgabe 5

a) 1 b) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ c) $\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

Aufgabe 6

a) x^2+a^2 b) y^4-x^4 c) ab d) a^2+ab+b^2 e) $\frac{23x-21}{(x-3)^2(x+3)}$

Aufgabe 7

a) a^5x^2 b) $127a^7$ c) $16\cdot\left(a^4+4\right)$

Aufgabe 8

a) 63 b) $\frac{11}{6}$ c) 120 d) $2n$

Aufgabe 9

A $\cup$ B = { $n \in N \mid n$ ist gerade $\vee$ $m \in N \mid m$ ist ungerade und $m \leq 11$ }

A $\cap$ B = {2, 4, 6}

A \ B = {8, 10, 12, … }

B \ A = {1, 3, 5, 7, 9, 11}

Aufgabe 10

$M_1 \times M_2$ = { (a,1), (b,1), (c,1), (a,2), (b,2), (c,2) }

Aufgabe 11

a) $L = \{x = 4{,}5\}$ b) $L = \{ -2, 2\}$ c) $L = \left\{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

d) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)\cdot(x^2+5x+6)$

Damit folgt $L = \{-3, -2, 1\}$

e) Die Gleichung ist nicht definiert für $x = 4$ und $x = -4$.

Löse $4\cdot(x+4)+3+2\cdot(x-4) = x^2 - 16$.

Die Lösungsmenge ist $L = \{-3, 9\}$

Aufgabe 12

a) $|4x-7| = 7$

$\Leftrightarrow$ $4x - 7 = 7$ $\vee$ $4x - 7 = -7$

Damit $L = \left\{\frac{7}{2}, 0\right\}$

b) $L = \left\{-\frac{7}{2}, 0\right\}$

c) Die Gleichung ist nicht definiert für $x = \frac{-10}{3}$.

$$\frac{|2x-5|}{|3x+10|} = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x-5}{3x+10} = 4 \quad \vee \quad \frac{2x-5}{3x+10} = -4$$

Damit $L = \{-4{,}5, -2{,}5\}$

d) $|-4x-3| = 3|2x+6|$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{-4x-3}{2x+6}\right| = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-4x-3}{2x+6} = 3 \quad \vee \quad \frac{-4x-3}{2x+6} = -3$$

Und damit $L = \left\{-\frac{21}{10}, -\frac{15}{2}\right\}$

Aufgabe 13

a) $L = \{x \in R \mid x < 2\}$ b) $L = \left\{x \in R \mid x > \frac{1}{2}\right\}$

c) $x > \frac{1}{x}$

Die Ungleichung ist nicht definiert für $x = 0$.
Der Nenner ändert das Vorzeichen bei $x = 0$.

1.Fall: $x > 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 > 1$ für $x \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad |x| > 1$

Also $L_1 = (1, \infty)$

2.Fall: $x < 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 < 1$ für $x \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad |x| < 1$

Also $L_2 = (-1,0)$

Und damit insgesamt: $L = L_1 \cup L_2 = (-1,0) \cup (1,\infty)$

d) Der Nenner ändert das Vorzeichen bei $x = 3$.

<u>1.Fall</u>: $x > -3$

$$\frac{3x+1}{x+3} \geq 1$$

$\Leftrightarrow \quad 3x+1 \geq x+3$

$L_1 = [1,\infty)$

<u>2.Fall</u>: $x < -3$

$$\frac{3x+1}{x+3} \geq 1$$

$\Leftrightarrow \quad 3x+1 \leq x+3$

$L_2 = (-\infty,-3)$

Also: $L = L_1 \cup L_2 = (-\infty,-3) \cup [1,\infty)$

e) Unterscheide die Fälle (Vorzeichenwechsel des Nenners) 1.) $x > 4$ und 2.) $x < 4$.

Es folgt $L_1 = (4,\infty)$ und $L_2 = (-\infty,4)$ also insgesamt $L = L_1 \cup L_2 = R \setminus \{4\}$.

f) $L = \{-4\}$.

g) Vorzeichenwechsel der Nenner führen auf drei Fälle:

1) $x < -3$ 2) $-3 < x < \frac{1}{2}$ 3) $x > \frac{1}{2}$

<u>1. Fall:</u> $x < -3$

$$\frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+3} < -1$$

$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot (x+3) - (2x-1) < (1-2x) \cdot (x+3)$

Das liefert $L_1 = \{\ \}$.

<u>2. Fall:</u> $-3 < x < \frac{1}{2}$

$$\frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+3} < -1$$

$\Leftrightarrow \quad 7 > -2x^2 - 5x + 3$

Die Ungleichung ist immer erfüllt, so dass $L_2 = (-3, \frac{1}{2})$.

<u>3. Fall:</u> $x > \frac{1}{2}$, siehe 1. Fall: $L_3 = \{\ \}$.

Insgesamt ergibt sich die folgende Lösungsmenge: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (-3, \frac{1}{2})$

h) Es sind die Fälle

1) $x < -4$ 2) $-4 < x < 4$ 3) $x > 4$

zu unterscheiden.

<u>1. Fall:</u> $x < -4$

$$\frac{4}{x-4} + \frac{3}{x^2-16} + \frac{2}{x+4} < 1$$

$\Leftrightarrow \quad 4 \cdot (x+4) + 3 + 2 \cdot (x-4) < x^2 - 16$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 9 > 9 + 27$

$\Leftrightarrow \quad x > 9 \vee x < -3$

Damit ist $L_1 = (-\infty, -4)$

2. Fall: $-4 < x < 4$

$$\frac{4}{x-4} + \frac{3}{x^2-16} + \frac{2}{x+4} < 1$$

$\Leftrightarrow \quad 0 > x^2 - 6x - 27$

$\Leftrightarrow \quad 36 > (x-3)^2$

$\Leftrightarrow \quad -3 < x < 9$

Damit ergibt sich L_2 zu $L_2 = (-3, 4)$

3. Fall: $x > 4$, s.o. $L_3 = (9, \infty)$

Also insgesamt: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (-\infty, -4) \cup (-3, 4) \cup (9, \infty)$.

Aufgabe 14

a) $L = (-4, 3)$

b) In beiden Beträgen kommt es zum Vorzeichenwechsel. Damit sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1) $x < -\frac{1}{2}$ 2) $-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{6}$ 3) $x > -\frac{1}{6}$

1. Fall: $x < -\frac{1}{2}$

$$|6x+1| < |2x+1|$$

$\Leftrightarrow \quad -6x - 1 < -2x - 1$

Also $L_1 = \{ \}$

<u>2. Fall:</u> $-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{6}$

$|6x+1| < |2x+1|$

$\Leftrightarrow \quad -6x-1 < 2x+1$

Also $L_2 = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{6})$

<u>3. Fall:</u> $x > -\frac{1}{6}$: $L_3 = (-\frac{1}{6}, 0)$

Insgesamt ergibt sich die Lösungsmenge zu : $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (-\frac{1}{4}, 0)$

c) Hier sind (Vorzeichenwechsel durch den Betrag) folgende Fälle zu unterscheiden:

1) $x < -\frac{1}{2}$ 2) $-\frac{1}{2} < x < \frac{2}{5}$ 3) $x > \frac{2}{5}$

Der Lösungsweg entspricht dem des Aufgabenteils b)

Es folgt: $L_1 = \{ \}$, $L_2 = (\frac{1}{7}, \frac{2}{5})$, $L_3 = (\frac{2}{5}, 1)$ und damit insgesamt

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (\frac{1}{7}, 1)$