Lösungshinweise zu Funktionen WS 06/07 Prof. Hollmann, Prof. Zacherl

Aufgabe 1

a) $D = R \setminus \{-2,2\}$ b) $D = R \setminus \{ x = n \cdot \pi, n \in Z \}$ c) $D = R \setminus \{0\}$

Aufgabe 2

a) $D = R \setminus \{-\frac{2}{3}\}$, $W = R \setminus \{\frac{2}{3}\}$, $f(x)^{-1} = \frac{2x+1}{2-3x}$

b) $D = (8,\infty)$, $W = R \setminus \{0\}$, $f(x)^{-1} = \frac{4+8x^2}{x^2}$

Aufgabe 3

a) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, $g(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$

c) $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = x^2$

Aufgabe 4

a) $f(g(x)) = 9x^2 - 36x + 38$, $g(f(x)) = 3x^2 + 6x + 2$
Der Definitionsbereich ist in beiden Fällen R.

b) $f(g(x)) = \frac{1}{x^2 + 2}$, $D = R$

$g(f(x)) = \frac{1}{x^2} + 2$, $W = R \setminus \{0\}$

c) $f(g(x)) = 2\sqrt{x} + 4$, $D = R_0^+$

$g(f(x)) = \sqrt{2x + 4}$, $D = [-2,\infty)$

d) $f(g(x)) = \left|\sqrt{2 - x}\right|$, $D = (-\infty,2]$

$g(f(x)) = \sqrt{2 - |x|}$, $D = [-2,2]$

Aufgabe 5

Auf einen Lösungshinweis wird an dieser Stelle verzichtet.

Aufgabe 6

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{n^2+3} = 2$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt{n^2 - \sqrt{n^4 - 8}} = 2$

Tipp: Mit $\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 - 8}}$ erweitern.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n-2}{3n-1}\right)^3 = \left(\dfrac{5}{3}\right)^3$

Aufgabe 7

a) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \dfrac{x^4+x^2-6}{x^2-1} = 0$

b) Es existiert nur der rechtsseitige Grenzwert. Für den gilt:

$$\lim_{x\to a_+} \frac{x-a}{\sqrt{x-a}} = 0$$

c) Für $a > 0$ existiert nur der linksseitige, für $a < 0$ nur der rechtsseitige Grenzwert.

Es gilt: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2}{a-\sqrt{a^2-x^2}} = a$

Aufgabe 8

a) $\lim\limits_{x\to 1_+} \dfrac{x^4-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1_+}(x^3+x^2+x+1) = 4$

Aufgabe 9

a) Untersuche die Nullstellen des Nenners. Damit folgt, dass $x = 0$ Unstetigkeitsstelle ist. Die stetige Ergänzung von $f(x)$ an Stelle 0 ist $f(0) = 2$.

b) Untersuche die Nullstellen des Nenners. Damit folgt, dass $x_1 = 2$ und $x_2 = -3$ Unstetigkeitsstellen sind. Die stetige Ergänzung von $f(x)$ an Stelle 2 ist $f(2) = \frac{7}{5}$. Der Pol an der Stelle -3 ist nicht hebbar.

c) $(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots$

Und damit: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = n$.

Aufgabe 10

a) $(2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 1) \div (x-2) = 2x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 22x + 38$ Rest 77

$(2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 1) \div (x-1) = 2x^4 + 4x^3 + x^2 + 5x - 1$ Rest 0

b) $(2x^4 - 11x^3 + 25x^2 - 32x + 20) \div (2x^2 - 7x + 6) = x^2 - 2x + \frac{5}{2}$ Rest $-\frac{5}{2}x + 5$

c) $(x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8) \div (x+2)^3 = x - 1$

Aufgabe 11

$$f(x) = C\frac{x(x-1)^2}{x(x+1)}$$

Mit $f(2) = \frac{1}{9}$ folgt $C = \frac{1}{3}$.

Die Asymptote berechnet man zu $g(x) = \frac{1}{3}x - 1$.

Auf die graphische Darstellung wird an dieser Stelle verzichtet.

Aufgabe 12

a) $x=1$ ist die einzige reelle Nullstelle. Man findet zwei Pole mit Vorzeichenwechsel an den Stellen $x=0$ und $x=-1$.

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = x-2$

Aufgabe 13

a) Es liegt Punktsymmetrie vor.

b) Die Funktion hat eine Nullstelle bei $x=0$ und keinen reellen Pol.

c) Auf die graphische Darstellung wird an dieser Stelle verzichtet.

Aufgabe 14

a) $f(x) = \dfrac{15x^4+6x^3-113}{x^3-5x+2} = 15x+6+\dfrac{75x^2-125}{x^3-5x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 15x+6$

c) $f(x)$ hat an den Stellen $x_1=2$, $x_2=-1+\sqrt{2}$ und $x_3=-1-\sqrt{2}$ Pole mit Vorzeichenwechsel.

Aufgabe 15

a) $x=4$

b) $x=6$

c) $x=\dfrac{\ln\frac{10}{3}}{\ln\frac{2}{3}}$

d) Mit der Substitution $y = 10^x$ führt das Problem auf die quadratische Gleichung $y^2 - y - 90 = 0$ zurück. Als Lösung ergibt sich $x = 1$.

e) Mit der Substitution $z = e^x$ führt das Problem auf die quadratische Gleichung $z^2 - 4z - 4 = 0$ zurück. Als Lösung ergibt sich $x = \ln 2$.

f) Mit der Substitution $z = e^{-x}$ führt das Problem auf die quadratische Gleichung $z^2 + e^{-1}z - 2e^{-2} = 0$ zurück. Als Lösung ergibt sich $x = 1$.

Aufgabe 16

a) $\sin^3 + \sin x + \cos^2 x \sin x = 2\sin x$

b) $(1 - \cos^2 x)^4 (\sin^2 x + \cos^2 x)^5 = \sin^8 x$

c) $\dfrac{\sin 6x}{\sin 3x} = 2\cos 3x$

d) $\left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right)^2 = 1 + \sin x$

e) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi - 4x}{4}\right) = \sqrt{2}\sin x$

Aufgabe 17

a) $2\sin x + \cos 2x = 1$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin x(1 - \sin x) = 0$

Damit folgt $L = \left\{x = k \cdot \pi \vee x = \dfrac{\pi}{2} + 2k \cdot \pi, k \in Z\right\}$

b) $\tan x + \cot x = 2$

$\Leftrightarrow \quad 1 = \sin 2x$

Damit folgt $L = \left\{x = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \pi, k \in Z\right\}$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$

$\Leftrightarrow \quad \tan x=-1$

Damit folgt $L=\left\{x=-\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi, k\in Z\right\}$

Aufgabe 18

a) $x=3$

b) Mit der Substitution $z=\ln x$ führt das Problem auf die quadratische Gleichung $z^2-5z+6=0$ zurück. Als Lösungen ergeben sich $x_1=e^3$ und $x_2=e^2$.

c) Mit der Substitution $z=\ln x$ führt das Problem auf die quadratische Gleichung $z^2-\frac{5}{3}z-4=0$ zurück. Als Lösungen ergeben sich $x_1=e^3$ und $x_2=e^{-\frac{4}{3}}$.

Aufgabe 19

Achtung: Die Gleichungen werden durch Quadratur umgeformt. Damit erhält man mögliche Lösungen. Ob es sich tatsächlich um Lösungen der jeweiligen Gleichung handelt muss durch eine Probe verifiziert werden.

a) $L=\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$

b) $L=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

c) $L=\left\{\frac{1}{9}\right\}$