

## Aufgaben zu reellen Funktionen WS 06/07 Prof. Hollmann, Prof. Zacherl

### Aufgabe 1

Bestimmen Sie für folgende Funktionen den größtmöglichen Definitionsbereich

a)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

b)  $f(x) = \frac{x}{\sin x}$

c)  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

### Aufgabe 2

Bestimmen Sie für folgende Funktionen Definitionsbereich und Bildmenge und, sofern Sie existiert, die Umkehrfunktion

a)  $f(x) = \frac{2x - 1}{3x + 2}$

b)  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x - 8}}$

### Aufgabe 3

Geben Sie zwei Funktionen  $f$  und  $g$  an, so dass die gegebene Funktion  $F(x)$  als Komposition  $f(g(x))$  dieser beiden Funktionen entsteht (die triviale Lösung ist nicht zulässig):

a)  $F(x) = \frac{1}{2x^2 + 1}$

b)  $F(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$

c)  $F(x) = \sin(x^2)$

### Aufgabe 4

Gegeben sind jeweils zwei Funktionsterme  $f(x)$  und  $g(x)$ . Bestimmen Sie jeweils den Funktionsterm der Komposition  $f(g(x))$  und  $g(f(x))$  und die dazugehörigen maximalen Definitionsmengen. Vergleichen Sie beide Ergebnisse.

a)  $f(x) = (x+1)^2 + 2$ ,  $g(x) = 3x - 7$

b)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x^2 + 2$

c)  $f(x) = 2x + 4$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$

d)  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = \sqrt{2-x}$

### Aufgabe 5

Gegeben ist die lineare Funktion  $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ .

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

b) Zeichnen Sie die Gerade, die aus diesem Graphen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten hervorgeht. Geben Sie die Funktionsgleichung  $y = g(x)$  dieser Geraden an.

c) Zeigen Sie die Umkehreigenschaft  $f(g(x)) = x$  und  $g(f(x)) = x$ .

d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Steigungen der beiden Geraden?

### Aufgabe 6

Bestimmen Sie – wenn möglich -- die Grenzwerte der folgenden Zahlenfolgen, deren Glieder durch die folgenden Terme gegeben sind:

a)  $a_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 3}$

b)\*  $a_n = n\sqrt{n^2 - \sqrt{n^4 - 8}}$

c)  $a_n = \left(\frac{5n-2}{3n-1}\right)^3$

### Aufgabe 7

Existiert der rechtsseitige, der linksseitige oder beide Grenzwerte?

Berechnen Sie – wenn möglich -- die Grenzwerte:

a)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^4 + x^2 - 6}{x^2 - 1}$

---

\* Der \* kennzeichnet eine Aufgabe mit gehobenem Schwierigkeitsgrad.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{\sqrt{x-a}}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2}{a - \sqrt{a^2 - x^2}}$$

### Aufgabe 8

Gegeben sei die Funktion  $f(x) = \begin{cases} x^4 - 1 & \text{für } x \neq 1 \\ 4 & \text{für } x = 1 \end{cases}$ .

Untersuchen Sie, ob  $f(x)$  an der Stelle  $x = 1$  stetig ist!

### Aufgabe 9

Bestimmen Sie die Definitionslücken der folgenden Funktionen. Welcher Wert ist den Funktionen an den Definitionslücken zuzuordnen, um ggf. die Unstetigkeit zu beheben?

$$\text{a) } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6}$$

$$\text{c) }^* f(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}, \text{ mit } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

### Aufgabe 10

Dividieren Sie mit Rest

$$\text{a) } 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 1 \text{ durch } x - 2 \text{ und } x - 1.$$

$$\text{b) } 2x^4 - 11x^3 + 25x^2 - 32x + 20 \text{ durch } 2x^2 - 7x + 6 .$$

$$\text{c) } x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 \text{ durch } (x + 2)^3$$

---

\* Der \* kennzeichnet eine Aufgabe mit gehobenem Schwierigkeitsgrad.

### Aufgabe 11

Gesucht ist eine gebrochene rationale Funktion mit minimalem Zähler- und Nennergrad, die folgende Bedingungen erfüllt: Sie hat

- einen Pol bei  $x = -1$ ,
- eine hebbare Definitionslücke bei  $x = 0$ ,
- eine doppelte Nullstelle bei  $x = 1$ .
- Außerdem soll der Graph durch den Punkt  $P = \left(2, \frac{1}{9}\right)$  verlaufen.

Geben Sie die Funktion an und skizzieren Sie die Funktion!

### Aufgabe 12

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x}$ .

- Wo besitzt  $f(x)$  Nullstellen, bzw. Pole und vom welcher Art sind die Pole?
- Welches asymptotische Verhalten zeigt  $f(x)$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  ?

### Aufgabe 13

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{5x}{1+x^2}$ .

Bestimmen Sie

- die Symmetrie der Funktion
- Nullstellen und Pole
- Skizzieren Sie die Funktion

### Aufgabe 14

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{15x^4 + 6x^3 - 113}{x^3 - 5x + 2}$ .

- Zerlegen Sie die Funktion in einen ganzrationalen und einen gebrochen rationalen Anteil.
- Geben Sie die Asymptoten der Funktion an.

c) Wo liegen die Pole von  $f(x)$  und von welchem Typ sind sie?

### Aufgabe 15

Bestimmen Sie die reellen Lösungen der nachfolgenden Gleichungen

a)  $a^{x+2} - a^{2(x-1)} = 0, \quad a > 0$

b)  $2^{4x} = 8^{x+2}$

c)  $2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+2}$

d)  $10^{2x} - 10^x = 90$

e)  $e^x + 4e^{-x} - 4 = 0$

f)  $e^{1-2x} + e^{-x} = 2e^{-1}$

### Aufgabe 16

Vereinfachen Sie die nachfolgenden mathematischen Terme

a)  $\sin^3 x + \sin x + \cos^2 x \sin x$

b)  $(1 - \cos^2 x)^4 (\sin^2 x + \cos^2 x)^5$

c)  $\frac{\sin 6x}{\sin 3x}$

d)  $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2$

e)  $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi - 4x}{4}\right)$

### Aufgabe 17

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden goniometrischen Gleichungen

a)  $2 \sin x + \cos 2x = 1$

b)  $\tan x + \cot x = 2$

$$\text{c) } \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$$

### Aufgabe 18

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichungen

$$\text{a) } 3 \lg x = \lg 27$$

$$\text{b) } \frac{1}{5 - \ln x} + \frac{2}{1 + \ln x} = 1$$

$$\text{c) } 3 \ln x - \frac{12}{\ln x} = 5$$

### Aufgabe 19

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichungen

$$\text{a) } \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 3} = 2$$

$$\text{b) } \frac{1 - x}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{c) } \frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{7x + 1}} = 2$$