Aufgaben zur Differenzialrechnung ***WS 06/07***
Prof.Zacherl / Prof. Hollmann

Aufgabe 1

Im abgelaufenen Jahr hatten einige große deutsche Firmen hohe prozentuale Gewinnzuwächse. Gleichzeitig wurden teilweise massiv Stellen gestrichen. Beides zusammen hat den Firmen viel Kritik eingebracht.

Ein kleines Rechenbeispiel soll zwar nicht das Verhalten der Unternehmer entschuldigen, aber es rückt vielleicht einige Zahlen etwas zurecht.

Eine Firma hatte im Jahre 2004 einen Gewinnrückgang von 25 % zu verzeichnen. Um wie viel Prozent müsste der Gewinn im Jahre 2005 steigen, um den Gewinnrückgang des Vorjahres gerade auszugleichen ?

Aufgabe 2

Berechnen Sie für folgende Funktionen jeweils $y' = \frac{dy}{dx}$.

Stellen Sie das Ergebnis in möglichst einfacher Form dar.

a) $y = \sin^3 x + \ln(\cos^2 x)$

b) $y = \left(\frac{1}{\cosh(x^2)}\right)^3$

c) $y = \left(\sinh(x^2)\right)^3$

d) $y = \ln(\cos(e^x))$

e) $y = \sqrt{e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}}$

f) $y = \ln\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right)$

g) $y = \ln\left(\frac{1}{\ln x}\right)$

h) $y = \frac{x^2}{a - \sqrt{a^2 - x^2}}$

i) $y = \frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}$

Aufgabe 3

Beweisen Sie durch Differenzieren:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right) \qquad \text{mit } a \in R \text{ , konstant}$$

Aufgabe 4

Differenzieren Sie die folgenden Funktionen mit Hilfe der logarithmischen Ableitung.

a) $y = \left(\sqrt{x^2+1}\right)^x$ (x>0)

b) $y = x^{\sqrt{x}}$ (x>0)

c) $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ (x>0)

d) $y = (\sin x)^{\tan x}$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Aufgabe 5

Berechnen Sie für folgende Funktionen jeweils $y' = \frac{dy}{dx}$

a) $x(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \qquad y(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$

b) $r(\varphi) = \varphi e^{2\varphi}$

Aufgabe 6

Berechnen Sie für die folgenden impliziten Funktionen jeweils $y' = \frac{dy}{dx}$

a) $F(x, y) = 5x^2y^4 - 4y^2 + x^2 \sin y - 10 = 0;$

b) $F(x, y) = ye^y + 2x^3 + y^2 + 4 = 0;$

c) $F(x, y) = \ln(x - y) + x^2 - 2y^2 - 3 = 0:$

d) $F(x, y) = y^2 - x \sin y = 0;$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie durch Anwendung der Regel von L'Hospital die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cot x-\dfrac{x+1}{\sin x})$

c) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2(t+\ln t)}{\sqrt{1+2t^2}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin(2x)}{1-\cos x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x\cdot\tan x)$

Aufgabe 8

a) Warum führt die folgende Anwendung der Regel von L'Hospital zu einem falschen Ergebnis?

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-1}{2x}=\lim_{x\to 1}\frac{6x+2}{2}=4$$

b) Wie lautet der richtige Grenzwert für das obige Problem ?

Aufgabe 9

In einem Reihenschwingkreis kann unter Umständen die Spannung U_L an der Induktivität größer werden als die Gesamtspannung U. Dieses Phänomen wird als Spannungsüberhöhung bezeichnet und die zugehörige Amplitude wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$f(\omega)=\frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2+(1-\omega^2)^2}}\qquad \text{mit}\quad \omega\ge 0$$

(Hier wurde L = C = R = 1 gesetzt.)

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f (ω) .
b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f (ω).
c) Hat f (ω) Polstellen ?
d) Berechnen Sie $\lim\limits_{\omega\to+\infty} f(\omega)$.
e) Bestimmen Sie die relativen Extrema von f (ω).
   Prüfen Sie dabei **nur** die notwendige Bedingung für ein relatives Extremum.
f) Skizzieren Sie den Graphen von f (ω).

Aufgabe 10

Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Funktionen y = f(x) = cos x und y = g(x) = sin x im Intervall $[0, \pi]$?

Aufgabe 11

Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion $y = f(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

Leiten Sie daraus eine allgemeine Formel zur Bestimmung der n-ten Ableitung $y^{(n)}$ ab.

Aufgabe 12

Vorgelegt sei die folgende reelle Funktion in ebener Polarkoordinatendarstellung:

$$r = r(\varphi) = \cos\varphi + \sin\varphi \qquad \text{mit} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi < \frac{3\pi}{4}$$

a) Bestimmen Sie die kartesische Ableitung $y' = \frac{dy}{dx}$ als Funktion von φ.

(Ergebnis: $y' = \frac{\cos(2\varphi) + \sin(2\varphi)}{\cos(2\varphi) - \sin(2\varphi)}$)

b) Für welche Werte von φ, besitzt die Funktion waagrechte bzw. senkrechte Tangenten ?

c) Bestimmen Sie den allgemeinen Ausdruck für die Krümmung $\kappa = \kappa(\varphi)$. Was folgt daraus für die angegebene Kurve ?

Aufgabe 13

Gegeben sei die implizite Funktion

$$F(x, y) = x^4(x - y) + y(2x^2 + y^2) = C;$$

a) Bestimmen Sie die Konstante C so, dass die Kurve durch den Punkt P(1,1) geht.

b) Berechnen Sie die Ableitung $y' = \frac{dy}{dx}$.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten im Punkt P.

Aufgabe 14

Berechnen Sie die Krümmung κ (x) der Kettenlinie $y(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$.

Zeigen Sie außerdem, dass für den zugehörigen Krümmungsradius gilt: $\rho = \frac{y^2}{a}$

Aufgabe 15

Bei der Diskussion um eine große Steuerreform wird auch ein sogenanntes Stufenmodell in Betracht gezogen. Konkret heißt dies:
Wer bis 8000 € jährlich verdient, zahlt keine Steuern. Wer sich mit seinem Einkommen zwischen 8000 € und 16 000 € befindet, zahlt für den 8000 € übersteigenden Betrag 12 % Steuern. Für Einkommensanteile zwischen 16 000 € und 40 000 € sollen 24 % Steuern bezahlt werden, für Einkommenanteile ab 40 000 € soll der Steuersatz 36 % betragen.

a) Geben Sie die abschnittsweise definierte Funktion S(x) der zu zahlenden Steuern in Abhängigkeit vom Einkommen x an.

b) Skizzieren Sie S(x).

c) Berechnen Sie den Durchschnittssteuersatz D(x) in Abhängigkeit vom Einkommen x und skizzieren Sie D(x).

Aufgabe 16

Vorgelegt ist die Funktion $y = 3x^5 - 5a^2x^3$ mit $a \in R$, konstant.

In welchen Punkten P_i (x_i, y_i) besitzt die zugehörige Kurve Minima bzw. Maxima ?
Wo liegen Wendepunkte ?

Aufgabe 17

Gegeben sei die gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{2x}{1+4x^2}$$

a) Wo hat f(x) Nullstellen bzw. Polstellen ?
b) Welche Asymptote hat f(x) ?
c) Bestimmen Sie die relativen Extrema von f(x).
d) Skizzieren Sie den Graphen von f(x).
e) Geben Sie eine Stammfunktion F(x) zu f(x) an