Prüfungsfach:	Mathematik 2	Zeit: 90 Min.
Prüfungstermin:	6.7.2015	
Prüfer:	Prof. Dr. Hollmann, Prof. Dr. Zacherl	
Hilfsmittel:	Formelsammlung (DIN-A4-Blatt)	

Kontrollieren Sie zunächst, ob Sie alle Aufgabenblätter erhalten haben.
Bearbeiten Sie die nachfolgenden Aufgaben. Verwenden Sie hierzu den jeweils freigelassenen Raum, erforderlichenfalls die Rückseite der Aufgabenblätter. Falls dies noch nicht ausreicht, sind Beiblätter zu verwenden (bitte mit Namen und Semester versehen und eindeutig den Aufgaben zuordnen). Benutzen Sie zur Bearbeitung bitte keinen Bleistift.
Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Lösungen ohne Begründungen werden nicht gewertet.
Viel Erfolg!

<u>Aufgabe 1 (Weitblick)</u> (5 Punkte)

Student Willy gönnt sich nach einem anstrengenden Semester einen Kreuzfahrt-Urlaub. Bei klarem und sonnigem Wetter sitzt er am Pool und schaut zufrieden auf das Meer hinaus. Wie weit reicht sein Blick, wenn er 20 Meter über der Wasseroberfläche sitzt ?
Schätzen Sie die Sichtweite mit einem Erdradius von 6000 km ab.

<u>Aufgabe 2 (Eigenwertproblem)</u> (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\lambda_1 = 2$ ist Eigenwert zu A. Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenvektor.

b) Zeigen Sie, dass $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist und berechnen Sie den zugehörigen Eigenwert λ_2.

c) A hat als dritten Eigenwert $\lambda_3 = 1$. Bestimmen Sie $\det(A - \lambda E)$.

Aufgabe 3 (Komplexe Zahlen) (7 Punkte)

a) Geben Sie das Ergebnis in algebraischer Form und in Exponentialform an

$$\frac{-1+7j}{3+4j} =$$

$$(1-j)e^{j\frac{3\pi}{4}} =$$

b) Lösen Sie die folgende Gleichung in C mit dem Ansatz z = x+jy

$$\frac{z}{1-j} + z^*(1-j) = 3$$

Aufgabe 4 (Partielle Ableitungen) (7 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktion $z = f(x,y) = (x^2 - y)e^{\frac{x}{y}}$

a) den Definitionsbereich

b) die Nullstellen

c) die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} =$$

Aufgabe 5 (Schwerpunkt, Volumen) (7 Punkte)

Gegeben ist das Kreissegment A

a) Bestimmen Sie die y-Koordinate des Schwerpunkts S von A.
(Hinweis: Verwenden Sie ebene Polarkoordinaten.)

b) Nun wird A um die y-Achse gedreht.
Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers mit Hilfe von Kugelkoordinaten.

Aufgabe 6 (Lineare Differenzialgleichung) (6 Punkte)

Gegeben sei die folgende Lösung einer linearen, homogenen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y_H(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-x}\sin(2x) + C_5\cos(2x)$$

a) Welche Ordnung hat die zugehörige Differenzialgleichung ?

b) Wie lauten die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der zugehörigen Differenzialgleichung ?

c) Zu welcher Differentialgleichung gehört die Lösung ?

Aufgabe 7 (Differenzialgleichung 1.Ordnung) (8 Punkte)

Vorgelegt sei die folgende lineare Differenzialgleichung

$$y' - \frac{1}{2x}y = \sqrt{x} \qquad \text{mit } x > 0$$

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung.

b) Berechnen Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten.

c) Geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung an.

d) Berechnen Sie die Lösung, für die gilt: $y(4) = 1$.

Aufgabe 8 (Fourierreihe) (8 Punkte)

Gegeben sei die folgende Funktion f(t) mit der Periode T= 2π und

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \textit{für} \quad -\pi \le t < -\dfrac{\pi}{2} \\ 1 & \textit{für} \quad \dfrac{\pi}{2} < t < \pi \\ 0 & \quad \textit{sonst} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie f(t).

b) Berechnen Sie (ggf. mit Symmetrieargumenten) die reellen Fourierkoeffizienten a_0, a_1, a_2 und b_1, b_2.

Aufgabe 9 (Taylorreihen) (6 Punkte)

a) Berechnen Sie die ersten zwei nicht verschwindenden Terme der Taylorentwicklung von

$$f(x) = e^{-2x}\ \ln(x)$$

um $x_0 = 1$.

b) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert mit Hilfe von Reihenentwicklungen

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+x^2-\sin(2x)}{(1+x)^2-1+x^2}$$