Prüfungsfach:	Mathematik 2	Zeit: 90 Min.
Prüfungstermin:	2.2.2015	
Prüfer:	Prof. Dr. Zacherl, Prof. Dr. Hollmann	
Hilfsmittel:	Formelsammlung (DIN-A4-Blatt)	

Kontrollieren Sie zunächst, ob Sie alle Angabenblätter erhalten haben.
Tragen Sie Namen und Semester in jedes Blatt dieser Angabe ein.
Bearbeiten Sie die nachfolgenden Aufgaben. Verwenden Sie hierzu den jeweils freigelassenen Raum, erforderlichenfalls die Rückseite der Aufgabenblätter. Falls dies noch nicht ausreicht, sind Beiblätter zu verwenden (bitte mit Namen und Semester versehen und eindeutig den Aufgaben zuordnen). Benutzen Sie zur Bearbeitung bitte keinen Bleistift.
Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Lösungen ohne Begründungen werden nicht gewertet.
Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (Partielle Ableitungen) (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $z = f(x,y) = \frac{1}{x} e^{x \cdot y}$.

a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

b) Zeigen Sie, dass der Satz von Schwarz gilt.

Aufgabe 2 Eigenwertproblem (6 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) $\lambda = 3$ ist Eigenwert zu A.
Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenvektor.

b) Bestimmen Sie die übrigen Eigenwerte.

Aufgabe 3 (Komplexe Zahlen) (11 Punkte)

a) Berechnen Sie und geben Sie den Wert in algebraischer (kartesischer) Form an.
Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

$(2-4j)\cdot(3-3j) = \ =$

$\frac{j}{2+3j} - \frac{3}{13} =$

$\frac{\left|\sqrt{24}+j\right|}{|j|} =$

b) Geben Sie in Exponentialform an:

$(1-j)\cdot e^{j\frac{3\pi}{4}}$

c) Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $z^3 = (1+j)$. .

Aufgabe 4 (Mehrfachintegral) (7 Punkte)

Berechnen Sie $\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} \left(\int_0^{x \cdot y} x^2 \cdot z \cdot y \; dz \right) dy \right) dx$

Aufgabe 5 (Getrennte Variable) (8 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = (1 + x^2) \cdot (1 + y^2)$$

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

b) Berechnen Sie die spezielle Lösung mit y(0) = 1.

Aufgabe 6 (Totales Differential) (6 Punkte)

Gegeben sei die folgende Funktion

$$z = f(x, y) = xy^3 + x^2 y \ .$$

a) Bestimmen Sie allgemein das totale Differential dz .

b) Bestimmen Sie das totale Differential dz für den Arbeitspunkt P(1 ; -1).

c) Ausgehend vom Arbeitspunkt P(1 ; -1) wird die Größe x um dx =0.08 verändert.
Wie muss gleichzeitig die Größe y verändert werden, damit der Funktionswert näherungsweise konstant bleibt ?

<u>Aufgabe 7 (Lineare Differentialgleichung)</u> (8 Punkte)

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 4y = 3x^2 + 1;$$

a) Bestimmen Sie eine allgemeine Lösung $y_H(x)$ der homogenen Differentialgleichung.

b) Berechnen Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit dem Ansatz $y_S(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Aufgabe 8 (Potenzreihen, Taylorreihen) (8 Punkte)

a) Geben Sie die ersten drei nicht verschwindenden Glieder der Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für folgende Funktion an:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$$

b) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert mit Hilfe von Reihenentwicklungen

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(e^x - 1)}{\cos x - 1}$$