Prüfungsfach:	Mathematik 2	Zeit: 90 Min.
Prüfungstermin:	7.7.2014	
Prüfer:	Prof. Dr. Hollmann, Prof. Dr. Zacherl	
Hilfsmittel:	Formelsammlung (DIN-A4-Blatt)	

Kontrollieren Sie zunächst, ob Sie alle Aufgabenblätter erhalten haben.
Bearbeiten Sie die nachfolgenden Aufgaben. Verwenden Sie hierzu den jeweils freigelassenen Raum, erforderlichenfalls die Rückseite der Aufgabenblätter. Falls dies noch nicht ausreicht, sind Beiblätter zu verwenden (bitte mit Namen und Semester versehen und eindeutig den Aufgaben zuordnen). Benutzen Sie zur Bearbeitung bitte keinen Bleistift.
Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Lösungen ohne Begründungen werden nicht gewertet.
Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (Partielle Ableitungen) (6 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktion $z = f(x,y) = \sin\left(\frac{x+y}{1+x}\right)$ die partiellen Ableitungen und vereinfachen Sie diese soweit möglich.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} =$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} =$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} =$

Aufgabe 2 (Eigenwertproblem) (6 Punkte)

Gegeben sei die **symmetrische Matrix** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\lambda_1 = 1$ ist Eigenwert zu A. Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenvektor.

b) Zeigen Sie, dass $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist und berechnen Sie den zugehörigen Eigenwert λ_2.

c) Bestimmen Sie den dritten Eigenvektor von A, **ohne** den zugehörigen Eigenwert λ_3 zu berechnen. (Hinweis: Die 3 Eigenwerte sind verschieden.)

Aufgabe 3 (Determinante, Inverse Matrix) (6 Punkte)

Gegeben sei die (3x3) – Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a \in R$$

a) Berechnen Sie det A.

b) Für welche $a \in R$ ist A invertierbar ?

c) Nun sei a so gewählt, dass A invertierbar ist.
Berechnen Sie die erste Spalte von A^{-1} für allgemeines a.

Aufgabe 4 (Komplexe Zahlen) (9 Punkte)

a) Bestimmen Sie

$$\frac{1}{j^2} - \frac{1}{j^7} =$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-2+j}{1+2j}\right) =$$

$$\operatorname{Im}\left(2e^{j\frac{\pi}{4}}\right) =$$

b) Berechnen Sie in algebraischer Form

$$\frac{3+j}{2-j} - (1+j)^2 =$$

c) Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $z^4 - 16j = 0$ und stellen Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene dar.

Aufgabe 5 (Relative Extremwerte, Sattelpunkte) (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$z = f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$$

a) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrema.

b) Hat die Funktion Sattelpunkte ? (Begründung)

Aufgabe 6 (Mehrfachintegral) (6 Punkte)

Gegeben ist das Doppelintegral $\int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{1} f(x, y) \; dy \right) \; dx$

a) Skizzieren Sie das Integrationsgebiet.

b) Berechnen Sie das Doppelintegral für $f(x, y) = (7 + x) \cdot y^2$.

Aufgabe 7 (Lineare Differenzialgleichung) (6 Punkte)

Gegeben sei die lineare Differenzialgleichung $y'' - 2y' + 2y = 2x + 5\sin x$;

a) Berechnen Sie die allgemeine reelle Lösung der homogenen Differenzialgleichung .

b) Berechnen Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung.
(***Hinweis:*** Benützen Sie den Ansatz $y_s = A\sin x + B\cos x + C + Dx$ mit A,B,C und D $\in R$.)

Aufgabe 8 (Differenzialgleichung 1.Ordnung) (8 Punkte)

Vorgelegt sei die lineare Differenzialgleichung

$$y' + \frac{2x^2 - 1}{x} y = e^{-x^2} \ln x \qquad \text{mit } x > 0$$

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung.
(Ergebnis: $y_H(x) = Cxe^{-x^2}$).

b) Berechnen Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten.
(Ergebnis: $y_S(x) = \frac{1}{2} xe^{-x^2} (\ln x)^2$).

c) Berechnen Sie die Lösung y(x) der inhomogenen Differentialgleichung mit y(1) = 1.

Aufgabe 9 (Fourierreihe) (7 Punkte)

Gegeben sei die folgende Funktion f(t) mit der Periode T= 2π und

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad 0 \le t < \pi \\ \frac{1}{\pi} t - 1 & \textit{für} \quad \pi \le t < 2\pi \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie f(t).

b) Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten a_0 und a_k (k = 1,2,3 ...).

c) Geben Sie die reelle Fourierreihe bis einschließlich k = 2 an , wenn sich für

$$b_k = \begin{cases} -\dfrac{1}{k} & \textit{für} \quad k \quad \textit{gerade} \\[2ex] \dfrac{4-3\pi}{k\cdot\pi} & \textit{für} \quad k \quad \textit{ungerade} \end{cases}$$

ergibt.