
Prüfungsfach:	Mathematik 2	Zeit: 90 Min.
Prüfungstermin:	4.2.2013	
Prüfer:	Prof. Dr. Zacherl, Prof. Dr. Hollmann	
Hilfsmittel:	Formelsammlung (DIN-A4-Blatt)	

Kontrollieren Sie zunächst, ob Sie alle Angabenblätter erhalten haben.
Tragen Sie Namen und Semester in jedes Blatt dieser Angabe ein.
Bearbeiten Sie die nachfolgenden Aufgaben. Verwenden Sie hierzu den jeweils freigelassenen Raum, erforderlichenfalls die Rückseite der Aufgabenblätter. Falls dies noch nicht ausreicht, sind Beiblätter zu verwenden (bitte mit Namen und Semester versehen und eindeutig den Aufgaben zuordnen). Benutzen Sie zur Bearbeitung bitte keinen Bleistift.
Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Lösungen ohne Begründungen werden nicht gewertet.
Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (Partielle Ableitungen)

(7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $z = f(x, y) = \ln\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right)$.

a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$.

b) Zeigen Sie, dass der Satz von Schwarz gilt.

Aufgabe 2 (Komplexe Zahlen)

(13 Punkte)

a) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in algebraischer (kartesischer) Form dar.

$$(1 - j\sqrt{3})^6 =$$

$$-j^{-7} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} =$$

b) Berechnen Sie

$$\frac{(2-j)(3+2j)}{5-j} =$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{6+2j}{3-4j}\right) =$$

c) Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $z^2 = (1 + j)^3$.

d) Wo liegen in der Gaußschen Zahlenebene alle $z \in C$ mit $|z - j| \leq 2$ und $\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(z)$?

Aufgabe 3 (**Mehrfachintegral**)

(8 Punkte)

a) Berechnen Sie $\int_0^{\pi} \left(\int_0^{\sqrt{\pi-x}} y \sin x dy \right) dx$.

b) Skizzieren Sie das zugehörige Integrationsgebiet.

Aufgabe 4 (Getrennte Variable)

(7 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = (xy)^{\frac{1}{2}}$$

mit $x > 0$ und $y > 0$.

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

b) Berechnen Sie die spezielle Lösung mit $y(1) = 1$.

Aufgabe 5 (**Relative Extremwerte, Sattelpunkte**)

(7 Punkte)

Bestimmen Sie die relativen Extremwerte und Sattelpunkte der folgenden Funktion

$$z = f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1 .$$

Aufgabe 6 (Lineare Differentialgleichung)

(9 Punkte)

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 1$, für die folgende Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + \alpha y = 0$$

eine von Null verschiedene Lösung mit $y(0) = y(2\pi) = 0$ hat.

Aufgabe 7 (Potenzreihen, Taylorreihen)

(9 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+2)x^n$$

b) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = x\sqrt{x+1}$ in eine Taylorreihe um $x_0 = 1$ bis einschließlich $O(x^2)$

c) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert mit Hilfe von Reihenentwicklungen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-x} + x - 1}{1 - \sqrt{1-x^2}}$$