Prüfungsfach:	Mathematik 1	Zeit: 90 Min.
Prüfungstermin:	19.1.2015	
Prüfer:	Prof. Dr. Zacherl , Prof. Dr. Hollmann	
Hilfsmittel:	Formelsammlung (1 DIN-A4-Blatt)	

Kontrollieren Sie zunächst, ob Sie alle Aufgabenblätter erhalten haben.
Tragen Sie Namen und Semester in Druckschrift auf dem Deckblatt dieser Angabe ein.
Bearbeiten Sie die nachfolgenden Aufgaben. Verwenden Sie hierzu den jeweils freigelassenen Raum, erforderlichenfalls die Rückseite der Aufgabenblätter. Falls dies noch nicht ausreicht, sind Beiblätter zu verwenden (bitte mit Namen und Semester versehen und eindeutig den Aufgaben zuordnen). Benutzen Sie zur Bearbeitung bitte keinen Bleistift.
Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Lösungen ohne Begründungen werden nicht gewertet.
Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (Grundlagen, Funktionen) (5 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$\log_{10} 4 + 2 \cdot \log_{10} 5 =$$

$$\tan\left(\frac{10}{6}\pi\right) =$$

b) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion zu $f(x) = \ln(\sqrt{x-1}+1)$.

Geben Sie für die Funktion und die Umkehrfunktion jeweils den Definitionsbereich an.

Aufgabe 2 (Gleichungen) (6 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Lösungen für die angegebene Gleichung.

a) $\sqrt{x+\sqrt{2x+5}} = \sqrt{3x-1}$;

b) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 30$;

Aufgabe 3 (Ableitungen) (8 Punkte)

a) Berechnen Sie jeweils $y^{|} = \frac{dy}{dx}$.

$$y(x) = \cosh\left(\ln\left(4x^3 + 5x\right)\right)$$

$$y(x) = e^{x^2 \cdot \sin x}$$

c) Bestimmen Sie die Tangente an die parametrisierte Kurve

$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 - 5t + 7$; $y(t) = e^{-t}$

in t = 1.

Aufgabe 4 (Kurvendiskussion) (7 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ mit $x \in R$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f(x).
b) Bestimmen Sie die behebbaren Definitionslücken, Polstellen und Nullstellen von f(x).
c) Bestimmen Sie die Asymptote von f(x).
d) Skizzieren Sie f(x).

Aufgabe 5 (Extremwertaufgabe) (6 Punkte)

Betrachten Sie die Parabel $f(x) = 5 - x^2$ und das im ersten Quadranten definierte Rechteck (siehe Skizze).

Für welches x wird die Fläche des Rechtecks maximal ?
Berechnen Sie die maximale Fläche.

Aufgabe 6 (Integral) (8 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral $\int \frac{2x^4 - 3\sqrt{x}}{7 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \; dx$.

b) Berechnen Sie das Integral $\int \frac{\ln(xe^x)}{x} \; dx$.

Aufgabe 7 (Vektoren) (6 Punkte)

Ein Dreieck im Raum hat die Eckpunkte A (1, -2, 3), B (2, -2, 2) und C (0,2,6).

a) Berechnen Sie $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ und $\vec{BC}$.

b) Erweitern Sie das Dreieck um einen Punkt D zu einem Parallelogramm.
Welche Koordinaten hat D ?

c) Bestimmen Sie die Fläche des Parallelogramms, das von A, B, C und D aufgespannt wird.

Aufgabe 8 (Matrizen) (6 Punkte)

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Matrizen:

i) $A \cdot B$
ii) $B \cdot A$
iii) $B^T \cdot A$
iv) $B \cdot C$

d) Geben Sie folgende Matrix explizit an: $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = (i+1) \cdot (j-2)$
wobei $1 \le i \le 3$ und $1 \le j \le 4$.

Aufgabe 9 (Gleichungssystem) (5 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + z &= 0\,; \\ x + y + (a+1)\,z &= 2\,; \\ 3x + y + (a+3)\,z &= a+2\,; \qquad \text{mit } a \in R \end{aligned}$$

Für welche Werte $a \in R$ hat das Gleichungssystem

a) keine
b) genau eine
c) unendlich viele Lösungen ?

d) Geben Sie die Lösungen für den Fall c) an.

<u>Aufgabe 10 (Determinante)</u> (3 Punkte)

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad a \in R$$

Für welche $a \in R$ gilt : rang(A) < 4 ?