Prüfungsfach:	Mathematik 1 Zeit: 90 Min.
Prüfungstermin:	20.1.2014
Prüfer:	Prof. Dr. Zacherl , Prof. Dr. Hollmann
Hilfsmittel:	Formelsammlung (1 DIN-A4-Blatt)

Kontrollieren Sie zunächst, ob Sie alle Aufgabenblätter erhalten haben.
Tragen Sie Namen und Semester in jedes Blatt dieser Angabe ein.
Bearbeiten Sie die nachfolgenden Aufgaben. Verwenden Sie hierzu den jeweils freigelassenen Raum, erforderlichenfalls die Rückseite der Aufgabenblätter. Falls dies noch nicht ausreicht, sind Beiblätter zu verwenden (bitte mit Namen und Semester versehen und eindeutig den Aufgaben zuordnen). Benutzen Sie zur Bearbeitung bitte keinen Bleistift.
Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Lösungen ohne Begründungen werden nicht gewertet.
Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (Grundlagen, Funktionen) (5 Punkte)

a) Skizzieren Sie die Funktionen $f(x) = \ln(-x)$ und $g(x) = \tan|x|$.

b) Berechnen Sie

$$e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{e}\right)}$$

$$\log_2\left(4^{\sqrt{3}}\right)$$

$$\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)$$

Aufgabe 2 (Gleichungen) (6 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Lösungen für die angegebene Gleichung.

a) $\left(2^{x-3}\right)^{x-4} = \left(2^{-2}\right)^{x-9}$

b) $2\sin(x)\cos(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

3 (Ableitungen) (9 Punkte)

Berechnen Sie jeweils $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

a) $y(x) = \ln\left(\tan\left(\dfrac{x^2+3}{1-x}\right)\right)$

b) $x(t) = \sqrt{t^2+1}$; $y(t) = t\sqrt{t^2+1}$;

b) $F(x,y) = \sin(x \cdot y) + 3y^2 + 2\cos(2y) = 0$;

Aufgabe 4 (Kurvendiskussion) (11 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$ mit $x \in R$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f(x).
b) Bestimmen Sie die behebbaren Definitionslücken, Polstellen und Nullstellen von f(x).
c) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f(x).
   Hinweis: Kürzen Sie gemeinsame Linearfaktoren im Zähler und Nenner.
d) Bestimmen Sie die Asymptote von f(x).
e) Skizzieren Sie f(x).

Aufgabe 5 (Integral) (8 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\ \ dx$ mit Hilfe der Substitution $u = x^2 + 1$.

b) Berechnen Sie das Integral $\int e^x \cos x \ \ dx$.

Aufgabe 6 (Vektoren) (6 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

b) Berechnen Sie das Volumen des Spats, das von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird.

c) Bestimmen Sie die Oberfläche des Spats, das von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird.

Aufgabe 7 (Basis eines Vektorraums) (5 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ eine Basis des R^3 bilden.

b) Wie lässt sich der Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen ?

Aufgabe 8 (Matrizen) (4 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}\quad, B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\quad \text{und}\quad C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Matrizen:

a) $A\cdot B$
b) $B\cdot A$
c) $A\cdot C^T$
d) $A^T\cdot A$

Aufgabe 9 (Gleichungssystem) (6 Punkte)

Gegeben sei das lineare (4x4)-Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
2x + y \qquad\qquad &= 0\,; \\
x + 2y + z \qquad &= 0\,; \\
y + 2z + w &= 0\,; \\
z + \alpha w &= \beta\,;
\end{aligned}
\qquad\qquad \text{mit } \alpha, \beta \in R
$$

Für welche reellen Zahlen $\alpha, \beta \in R$ hat das Gleichungssystem

a) keine
b) genau eine
c) unendlich viele Lösungen ?