Aufgaben zu Eigenwerten / Eigenvektoren ***SS 2006***
(Prof. Clemen / Prof.Zacherl / Prof. Hollmann)

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Matrix A $= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) Überprüfen Sie (ohne Berechnung der Eigenwerte), ob der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der Matrix A ist.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Matrix A $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

a) λ_1 = -4 ist Eigenwert zu A.
Berechnen Sie den zugehörigen Eigenvektor.

b) Zeigen Sie auf möglichst einfache Weise, dass $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zu A ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert λ_2 .

c) Was läßt sich ohne weitere Rechnung über den dritten Eigenwert sagen ?

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) $\lambda = -1$ ist Eigenwert zu $\underline{\underline{A}}$.
   Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenvektor.

b) Bestimmen Sie die übrigen Eigenwerte (ohne Eigenvektoren).

Aufgabe 6

Gegeben sei die reelle quadratische Matrix $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.
b) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren so, dass sie ein orthonormiertes System bilden.
c) Kontrollieren Sie die Diagonalisierung $R^T AR = D$, wobei gerade die Matrix ist, die als Spalten die Eigenvektoren enthält.

Aufgabe 7

Gegeben sei die Ellipsengleichung $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$.

a) Berechnen Sie die Richtung der beiden Hauptachsen.
b) Geben Sie die Länge der beiden Hauptachsen an.
c) Skizzieren Sie die Ellipse.