Aufgabe 1:

Berechnen Sie den Definitionsbereich und die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der folgenden Funktionen:

a) $z = f(x,y) = \ln\left(\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right)$

b) $z = f(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)$

c) $z = f(x,y) = \arctan\left((xy^2+3y-x^2)^{\frac{5}{2}}\right)$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $z = f(x,y) = (x^2-y^2)\mathrm{e}^{x^2-y^2}$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von $f(x,y)$

b) Berechnen Sie die Nullstellen von $f(x,y)$ und bestimmen Sie die (x,y)-Werte, an denen $f(x,y)$ positiv, bzw. negativ ist. Skizzieren Sie die Bereiche in der (x,y)-Ebene.

c) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Aufgabe 3:

Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass die Funktion

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi \cdot t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \qquad a = \mathrm{const.}$$

eine Lösung der Wärmeleitgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ist.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Funktion $z = f(x,y) = x^3 + 2xy + y^3$. Bestimmen Sie die Extrem- und Sattelpunkte dieser Funktion.

Aufgabe 5:

Ein Blech mit der festen Breite b soll durch symmetrisches Hochbiegen der beiden Seiten zu einer trapezförmigen Rinne mit möglichst großem Querschnitt A umgeformt werden.

a) Bestimmen Sie $A = f(x,\alpha)$ bei festem b.
(Ergebnis: $A = f(x,\alpha) = x\sin\alpha\,[b - x(2-\cos\alpha)]$)

b) Wie müssen die Größen x und α gewählt werden, damit sich eine maximale Querschnittsfläche A ergibt?
(Der Nachweis, dass es sich bei dem gefundenen Extremum um ein Maximum handelt muss nicht erbracht werden.)

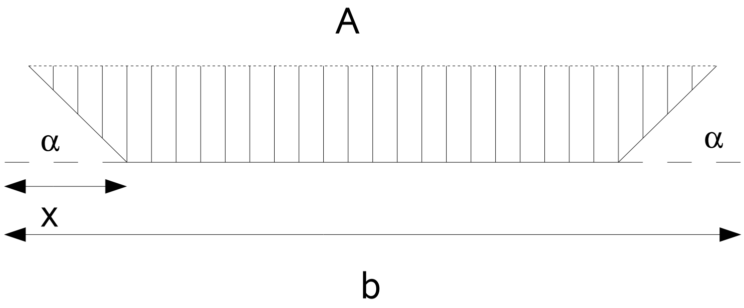

Abb 1: Skizze zu Aufgabe 5

Aufgabe 6:

Die Dichte einer Eisenkugel berechnet sich nach der Formel:

$$\rho(m, V) = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}r^3\pi}$$

Dabei ist m die Masse und r der Radius der Eisenkugel.
Geben Sie an, wie groß der maximale Fehler bei der Berechnung der Dichte ist, wenn $m = 560,7 \pm 0,5$ g, sowie $d = 5,11 \pm 0.02$ cm gemessen werden. d ist der Durchmesser der Eisenkugel.

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Funktion $z = f(x, y) = x^2 \sqrt{x^2 + y^2}$

a) Bestimmen Sie den Wert des totalen Differenzials im Arbeitspunkt $(1, 1)$ für die Inkremente $\Delta x = -0.1$ und $\Delta y = 1.0$.

b) Um wie viel mal stärker wirken sich für diesen Arbeitspunkt die Änderungen in der x Koordinate verglichen mit den Änderungen in der y Koordinate auf das Ergebnis aus?